Chapitre 2

Variables aléatoires

2.1 Variable aléatoire réelle discrète

Définition 9 *On appelle variable aléatoire réelle et discrète sur un ensemble fondamental* Ω*, tout fonction* $X \ : \ \Omega \ \rightarrow \ \mathbf{R}$ *de* Ω *dans l'ensemble ensembles des nombres réels* $\mathbf{R}$ *des nombres réels telle que* $X(\Omega)$ *est fini ou infin dénombrable, et pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *on a :*

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathscr{P}(\Omega), \tag{2.1}$$

c'est à dire que $X^{-1}(x)$ *est un événement de* Ω*.*

Exemple 8 *On considère l'épreuve qui consiste à jeter deux fois successives une pièce de monnaie équilibrée, on a l'ensemble fondamental de cette épreuve est donnée par*

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}, \tag{2.2}$$

Les probabilitées des événement élémentaire de Ω *sont donnée par :*

$$P(\{(F, F)\}) = P(\{(F, P)\}) = P(\{(P, F)\}) = P(\{(P, P)\}) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} = 0.25 \tag{2.3}$$

Soit X *la variable aléatoire qui correspond à chaque élément de* Ω *Je nombre de piles qui soit apparu. On a :*

X((F,F))=0 , X((P,F))= X((F,P))=0X((P,P))=2et X(Ω)={0,1,2}

Définition 10 *(Loi de probabilitéLa d'une variable aléatoire) On definie la loi de probabilité*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathbf{R} \arrow[dl, "P_X"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

d'une variable aléatoire réelle et discrète par l'application $P_X = P \circ X^{-1}$*,*

$$P_X(X = x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}) \tag{2.4}$$

Exemple 9 *on cosidère l'exemple précédent :*

- $P_X(X = 0) = P(\{(F, F)\}) = \frac{1}{4}$
- $P_X(X = 1) = P(\{(P, F), (F, P)\}) = \frac{1}{2}$
- $P_X(X = 2) = P(\{(P, P)\}) = \frac{1}{4}$

Ces données peuvent se présenter sous la forme d'un tableau, de la manière suivante :

x_i	0	1	2
$P_X(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2.1.1 Fonction de répartition

Définition 11 *La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'applicationde $\mathbf{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :*

$$\begin{aligned} F \quad : \quad \mathbf{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Propriétés 1
1. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire disrete réelle X est une fonction en escalier croissante et continue à droite.*
2. $F(x) = \sum_{x_k \leq x} P(X = x_k)$
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exemple 10 *Dans l'exemple précédent*

1. *Si* $x < 0, F(x) = 0$.
2. *Si* $0 \leq x < 1, F(x) = \frac{1}{4}$.
3. *Si* $1 \leq x < 2, F(x) = \frac{3}{4}$.
4. *Si* $2 \leq x, F(x) = 1$.

2.1.2 Esperance mathematique d'une variable aléatoire discrete

Définition 12 *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est donné par la formule :*

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) \tag{2.5}$$

à condition que cette série est convergente

Exemple 11 *Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve :*

$$E(X) = \sum_k x_k P(X = x_k) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Propriétés 2 *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X vérifie*

1. $E(\alpha) = \alpha, \forall \alpha$ *une constante de* $\mathbf{R}$
2. $E(X + \alpha) = E(X) + \alpha, \forall \alpha$ *une constante de* $\mathbf{R}$
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

2.1.3 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrete

Définition 13 *On appelle variance d'une variable aléatoire X la quantité donné par la formule :*

$$Var(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) \tag{2.6}$$

à condition que cette série est convergente

Exemple 12 *Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve :*

$$Var(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Propriétés 3 *Les propriétés suivantes sont vérifiés*

1. $Var(X) == E(X^2) - E(X)^2$
2. $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X), \forall \alpha$ *et* β *des constantes de* $\mathbf{R}$

Définition 14 *Soit X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbf{N}^\star$, on appelle le moment d'ordre r de X la quantité :*

$$E(X^r) = \sum_k (x_k)^r P(X = x_k), \tag{2.7}$$

et le moment centé d'ordre r de X la quantité :

$$E(X - E(X))^r = \sum_k (x_k - E(X))^r P(X = x_k). \tag{2.8}$$

Remarque 2 *La variance est le moment centré d'ordre* 2.

Définition 15 *L'écart type noté σ d'une variable aléatoire X est défini comme la racine de la sa variance :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}. \tag{2.9}$$

2.1.4 Variables aléatoires discètes usuelles

Certaines variables aléatoires interviennent souvent dans de nombreux processus naturels. Leur loi ont donc une importance particulière. Les lois discrètes les plus fréquentes sont : Soientt A et B deux évenements d'un ensemble fondamental Ω, on note par :

Variables de Bernoulli

Définition 16 *On appelle épreuve de Bernoulli une expérience alétoire a deux résultats $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. On peut interpréter l'une de ces deux résultats comme un succès noté par 1 et l'autre comme un échec noté par 0 ou inversement et on a :*

$$\begin{cases} P(\{\omega_1\}) = p, & ; \\ P(\{\omega_2\}) = 1 - p, & . \end{cases} \tag{2.10}$$

Définition 17 *On dit que la variable alétoire discrète X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, notée $B(p)$, si :*

$$\begin{cases} P(X = 1) = p, & ; \\ P(X = 0) = 1 - p, & . \end{cases} \tag{2.11}$$

Exemple 13 *L'expérience qui consiste à jeter une pièce de monaie équilibrée est une épreuve de Bernoulli. Soit X l'application de $\Omega = \{P, F\}$ dans $\{0, 1\}$ définie par : $X(P) = 1$ et $X(F) = 0$, X est une variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$*

Variables binomiale

Définition 18 *Si on répète n fois une On épreuve de Bernoulli de paramètre p dans des même conditions, on dit que l'application qui compte le nombre de succès obtenu dans cette épreuve suit une loi binimiale de paramètres n et p que l'on note souvent $\mathscr{B}(n, p)$. On a alors $X(\Omega = \{0, 1, 2, ..., n\}$ et on a :*

$$\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\} : P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \tag{2.12}$$

Exemple 14 *L'expérience qui consiste à jeter 4 fois une pièce de monaie équilibrée et on compte le nombre de pile obtenus. On suppose que X est le nombre de pile et qui correspond à un succès, alors X suit une loi de Bernoulli de parmètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$ et on a :*

- $P(X = 0) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_4^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{4-0} = \frac{1}{16}$
- $P(X = 1) = C_4^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{4-1} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{4-2} = \frac{3}{8}$
- $P(X = 2) = C_4^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{4-3} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 4) = C_4^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^{4-4} = \frac{1}{16}$

Variables de Poisson

Définition 19 *On appelle variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ une variable aléatoire disrète entière X avec $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et dont la loi de probabilité est donnée par :*

$$\forall k \in \mathbf{N} : P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{2.13}$$

Propriétés 4 *Soit X une variable binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ telles que $n \to \infty$ et $p \to 0$ de manière à ce que le produit np tend vers une limite finie λ. Alors la variable aléatoire X tend vers une variable de Poisson λ.*

Variables géométrique

Définition 20 *On appelle variable aléatoire géométrique de paramètre p une variable aléatoire disrète X avex $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ et dont la loi de probabilité est donnée par :*

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star : P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \tag{2.14}$$

Exemple 15 *On considère l'expérience qui consiste à jeter indéfinement une pièce de monaie équilibrée et soit p la probabilité d'obtenir pile, on a $\Omega) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)/\omega_I = pile ou face\}$. Soit X la variable aléatoire définie par :*

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbf{R} \\ \omega & \mapsto & F(x) = \text{nombre de premier lancer donnant pile.} \end{array}$$

On a : $X(\Omega) = \mathbf{N}^\star$ *et* $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

2.2 Variable aléatoire réelle continue

Définition 21 *On appelle variable aléatoire réelle et continue sur un ensemble fondamental* Ω*, une application* $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$*, telle que pour tout intervalle* I *de* $\mathbf{R}$ *on a :*

$$X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} \in \mathscr{P}(\Omega), \tag{2.15}$$

c'est à dire que $X^{-1}(I)$ *est un événement de* Ω*.*

Définition 22 *(Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue) On definie la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue par sa fonction de répartition, donnée par :*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}) \tag{2.16}$$

Propriétés 5
1. *La fonction de répartition* F *d'une variable aléatoire disrete réelle* X *est une fonction croissante et continue à droite.*
2. $0 \leq F(x) \leq 1$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Définition 23 *Soit* X *une variable aléatoire absolument continue et* F *sa fonction de répartition. On dit que est absolument continue s'il existe une fonction* f *telle que :*

1. f *est continue par morceaux sur* $\mathbf{R}$*.*
2. f *est positive ou nulle sur* $\mathbf{R}$ *(*$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$*).*
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$
4. $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

La fonction f *s'appelle densité de* X

Propriétés 6 *Soit* X *une variable aléatoire absolument continue et soient* f *sa densité et* F *sa fonction de répartition*

1. $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$ *on a :* $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt.$
2. $\forall a \in \mathbf{R}$ *on a :* $P(X > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt.$

Remarque 3 *De la propriété précédente, on peut remarquer que :*

1. *Si on a* $a = b$ *il result* $P(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$
2. *On a aussi* $P(X < a) = P(X \leq a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt.$

Exemple 16 *Soit X une variable alétoire continue de densité :*

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - 2x^2), & 0 < x < 2\,; \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{2.17}$$

Déterminer la valeur de k et calculer $P(X > 1)$?

f est une densité alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} k(4x - 2x^2)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 1 \\ &= k\int_{0}^{2} k(4x - 2x^2)dx = 1 \\ &= k(2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$k = \tfrac{3}{8}$$

Donc

$$P(X > 1k = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{8}\int_{1}^{2}(4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$$

2.2.1 Esperance mathématique d'une variable aléatoire continue

Définition 24 *L'espérance mathématique d'une variable continue X est donné par la formule :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{2.18}$$

à condition que cette intégrale converge absolument

Exemple 17 *Dans l'exemple précédent si on calcule l'espérance mathématique on trouve :*

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx + \frac{3}{8}\int_{0}^{2} x(4x - 2x^2)dx + \int_{2}^{+\infty} x\cdot 0dx \\ &= \frac{3}{8}\int_{0}^{2}(4x^2 - 2x^3)dx \\ &= \frac{3}{8}(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4)\Big|_0^2 = 1 \end{aligned}$$

Propriétés 7 *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X vérifie*

1. $E(\alpha) = \alpha, \forall\alpha$ *une constante de* $\mathbf{R}$
2. $E(X + \alpha) = E(X) + \alpha, \forall\alpha$ *une constante de* $\mathbf{R}$
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

2.2.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire continue

Définition 25 *On appelle variance d'une variable aléatoire X la quantité donné par la formule :*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \tag{2.19}$$

à condition que cette intégrale converge absolument

Exemple 18 *Dans l'exemple précédent si on calcule la variance on trouve :*

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} (x-1)^2 \cdot 0dx + \frac{3}{8}\int_{0}^{2} (x-1)^2(4x-2x^2)dx + \int_{2}^{+\infty} (x-1)^2 \cdot 0dx \\
&= \frac{3}{8}\int_{0}^{2} (-2x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 4x)dx \\
&= \frac{3}{8}(-\frac{2}{5}x^5 + 2x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 4x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Propriétés 8 *Les propriétés suivantes sont vérifiés*

1. $Var(X) == E(X^2) - E(X)^2$
2. $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X), \forall \alpha$ *et* β *des constantes de* $\mathbf{R}$

Définition 26 *Soit X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbf{N}^\star$, on appelle le moment d'ordre r de X la quantité :*

$$E(X^r) = \sum_k (x_k)^r P(X = x_k), \tag{2.20}$$

et le moment centé d'ordre r de X la quantité :

$$E(X - E(X))^r = \sum_k (x_k - E(X))^r P(X = x_k). \tag{2.21}$$

Remarque 4 *La variance est le moment centré d'ordre* 2.

Définition 27 *L'écart type noté σ d'une variable aléatoire X est défini comme la racine de la sa variance :*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}. \tag{2.22}$$

2.3 Lois usuelles continues

Certaines variables aléatoires interviennent souvent dans de nombreux processus naturels. Leur loi ont donc une importance particulière. Les lois continues les plus fréquentes sont :

2.3.1 Loi uniforme

Définition 28 *On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme si sa densité est constante sur un intervalle $[a, b]$ et on a :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si \quad x \in [a,b]\,; \\ 0, & si \quad x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{2.23}$$

Et on écrit $X \sim \mathscr{U}([a, b])$

Fonction de répartition d'une Loi uniforme

La fonction de répartition de la variable $X \sim \mathscr{U}([a,b])$ est donnée par :
- Si $x < a$, on a :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx = 0$$

- Si $a \leq x < b$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{t}{b-a}\bigg|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

- Si $b \leq x$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{t}{b-a}\bigg|_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

L'espérance mathématique d'une Loi uniforme

L'espérance mathématique de la variable $X \sim \mathscr{U}([a,b])$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx \\
&= \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{b+a}{2}
\end{aligned}$$

Variance et écart-type d'une Loi uniforme

La Variance dde la variable $X \sim \mathscr{U}([a,b])$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
Var(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{a} (x - \frac{b+a}{2})^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} \frac{(x-\frac{b+a}{2})^2}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} (x - \frac{b+a}{2})^2 \cdot 0 \cdot dx \\
&= \frac{1}{4(b-a)} \int_{a}^{b} (2x-b-a)^2 dx \\
&= \frac{1}{24(b-a)} (2x-b-a)^3 \bigg|_{a}^{b} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

Propriétés 9 *Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$ alors :*

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}, \quad si \quad [c,d] \subset [a,b]\,; \tag{2.24}$$

Exemple 19 *Dans un bureau de poste, le temps de service X à un guichet suit une loi uniforme et prend entre 2 minutes et 10 minutes de temps.*

1. *Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X.*
2. *Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et sept minutes ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes ?*
4. *Préciser le temps d'attente moyen.*

La variable X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2,10]$. Alors,

1. *sa fonction de densité est une fonction constante sur $[2,10]$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-2} = \frac{1}{8} = 0.125, & si \quad x \in [2,10]\,; \\ 0, & si \quad x \notin [2,10]. \end{cases} \tag{2.25}$$

2. *La probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et sept*

3. *La probabilité qu'un client attende plus de huit minutes est :*

$$P(8 \leq X) = \int_8^{+\infty} f(x)dx = \int_8^{10} \frac{1}{8} \cdot dx + \int_{10}^{+\infty} 0 \cdot dx = \frac{x}{8}\Big|_8^{10} = \frac{2}{8} = 0.25$$

4. *Le temps d'attente moyen est :*

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_{-\infty}^{2} x \cdot 0dx + \int_2^{10} x(\frac{1}{8})dx + \int_{10}^{+\infty} x \cdot 0dx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^2 dx \\ &= \frac{1}{8}(x)\Big|_2^{10} = 1 \end{aligned}$$

Loi exponentielle

Définition 29 *On dit qu'une variable aléatoire X suit une Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par :*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & si \quad x \geq 0\,; \\ 0, & si \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Et on écrit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$

Fonction de répartition d'une Loi exponentielle

La fonction de répartition de la variable $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ est donnée par :

– Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = 0$$

– Si $0 \leq x$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

L'espérance mathématique d'une Loi exponentielle

L'espérance mathématique de la variable $X \sim \mathscr{U}([a, b])$ est donnée par :

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx \\ &= \lim_{R \to +\infty} \Big[- xe^{-\lambda x} - \tfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big]_0^r \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Variance et écart-type d'une Loi exponentielle

La Variance dde la variable $X \sim \mathscr{U}([a, b])$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Var(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \cdot 0 \cdot dx + \lambda \int_0^{+\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}dx \end{aligned}$$

Après deux fois intégration par parties on trouve :

$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Loi normale

Définition 30 *On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{R}$ suit une Loi normale de paramètres (m, σ) si sa densité est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.27}$$

Et on écrit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ où $m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{Var(X)}$