MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

Matière : Radiocommunication
Spécialité : Systèmes des Télécommunications
Année : Master 1
Année Universitaire : 2020/2021

Solutions TD N°1

Exercice 1 :

Une onde électromagnétique plane se propage dans un milieu diélectrique parfait sans charges. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que :

1/- Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires.

2/- Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.

3/- Le vecteur **R**=**E**×**H**, possède une seule composante dans la direction de propagation.

Pour les cas suivants : a)- Propagation suivant X ; b)- Propagation suivant Y ; c)- Propagation suivant Z

Solution

1/- Le champ électrique et magnétique sont perpendiculaires :

Il faut montrer que le produit scalaire entre le champ électrique E et le champ magnétique H égale à zéro. Pour cela, nous allons utiliser les équations de Maxwell.

$$Rot\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \Leftrightarrow \nabla\Lambda\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \text{ c-à-d}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Ex & Ey & Ez \end{vmatrix} = -\mu\frac{d\left(Hx.\vec{i} + Hy.\vec{j} + Hz.\vec{k}\right)}{dt}$$

On commence par l'équation de Maxwell-Faraday :

Puis l'équation de Maxwell-Gauss dans le cas d'un milieu sans charges (ρ=0):

$$Div\vec{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla.\vec{E} = \mathbf{0} \text{ c-à-d}: \frac{\partial Ex}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial Ez}{\partial z} = \mathbf{0}$$

Comme la propagation est dans la direction des z alors :

$$\frac{\partial Ex}{\partial x} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial Ey}{\partial y} = \mathbf{0}$$

$$et \text{ par conséquent}: \frac{\partial Ez}{\partial z} = \mathbf{0} \Rightarrow Ez = \mathbf{0} \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

$$Meme \text{ chose pour Div } \vec{H} = \mathbf{0}$$

$$et \text{ par conséquent}: \frac{\partial Hz}{\partial z} = \mathbf{0} \Rightarrow Hz = \mathbf{0} \text{ (La composante longitudinale est nulle)}$$

Alors :

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial/\partial z \\ \mathrm{Ex} & \mathrm{Ey} & 0 \end{vmatrix} = -\mu \frac{d\left(Hx.\vec{i} + Hy.\vec{j}\right)}{dt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial Ey}{\partial z} = -\mu \dfrac{dHx}{dt} \Rightarrow Ey = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} Hx \\ +\dfrac{\partial Ex}{\partial z} = -\mu \dfrac{dHy}{dt} \Rightarrow Ex = -\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} Hy \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{H}} = \mathrm{Ex.Hx + Ey.Hy + Ez.Hz} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(-Hy.Hx + Hx.Hy\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$$

2/- <u>Le champ électrique et magnétique appartiennent au plan d'onde.</u>

Le plan d'onde est le plan qui perpendiculaire à la direction de propagation +oz donc c'est le plan (XOY) Et comme E et H possèdent deux composantes respectivement (Ex, Ey) et (Hx, Hy), alors : E et H appartiennent au plan d'onde.

3/- <u>Le vecteur P=E∧H, possède une seule composante dans la direction de propagation</u> :

$$\vec{P} = \vec{\mathrm{E}}\Lambda\vec{\mathrm{H}}^* = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ Ex & Ey & 0 \\ \mathrm{Hx}^* & \mathrm{Hy}^* & 0 \end{vmatrix} = \left(Ex.Hy^* - Ey.Hx^*\right)\vec{\mathrm{i}} \text{ (dans la direction de propagation)}$$

<u>**Exercice 2 :**</u>

Deux ondes électromagnétiques planes sinusoïdales de même pulsation ω et de même amplitude Em se propagent dans les directions x et y respectivement. Les champs électriques E des deux ondes sont parallèles à Oz. Ecrire en fonction de x, y et t les expressions des grandeurs suivantes :

1/- Les composantes du champ électrique **E** résultant.

2/- Les composantes du champ magnétique **H** résultant.

3/- Composantes du vecteur **P**.

<u>**Solution**</u>

1/- Les composantes du champ électrique **E** résultant.

$$\vec{\mathrm{E}} \text{ a pour composantes} : \begin{cases} Ex = \mathbf{0} \\ Ey = \mathbf{0} \\ Ez = Em\left[\sin(\omega t - \beta.x) + \sin(\omega t - \beta.y)\right] \end{cases}$$

2/- Les composantes du champ magnétique H résultant.

Pour cela, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu\frac{d\vec{H}}{dt} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & Ez \end{vmatrix} = -\mu\frac{d\left(Hx.\vec{i}+Hy.\vec{j}+Hz.\vec{k}\right)}{dt} \Leftrightarrow \begin{cases} +\dfrac{\partial Ez}{\partial y} = -\mu\dfrac{dHx}{dt} \Rightarrow Hx = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mu}.\displaystyle\int\dfrac{\partial Ez}{\partial y}dt \\ -\dfrac{\partial Ez}{\partial x} = -\mu\dfrac{dHy}{dt} \Rightarrow Hy = +\dfrac{\mathbf{1}}{\mu}.\displaystyle\int\dfrac{\partial Ez}{\partial x}dt \\ \mathbf{0} = -\mu\dfrac{dHz}{dt} \Rightarrow Hz = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\text{Après developpement} : \begin{cases} Hx = \dfrac{\beta}{\mu.\omega}Em.\sin(\omega t - \beta.y) \\ Hy = -\dfrac{\beta}{\mu.\omega}Em.\sin(\omega t - \beta.x) \\ Hz = \mathbf{0} \end{cases}$$

3/- Composantes du vecteur **P**

$$\vec{P} = \vec{E}\Lambda\vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathbf{0} & 0 & Ez \\ Hx^* & Hy^* & 0 \end{vmatrix} = (-Ez.Hy^*)\vec{i} + (Ez.Hx^*)\vec{j}$$

Exercice 3 :

Relativement à un repère orthonormé *oxyz* de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω qui se propage dans le vide dans le demi-espace $z \leq 0$, dans la direction $\overrightarrow{oz}$, est :

$$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + E_0\sin(\omega t - kz)\vec{u}_y.$$

On donne dans le vide : la célérité de la lumière $c = 3.\,10^8$ m/s et la permittivité absolue $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}F/m.$

1. Quel est le type de polarisation de cette onde ?
2. Calculer l'induction magnétique associée $\vec{B}(z,t)$.
3. Montrer que le vecteur de Poynting de cette onde est constant.

Solution

1. Cette onde possède deux composantes d'égale amplitude et déphasées entre elles de 90°, donc la polarisation de l'onde est circulaire
2. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ alors

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d\left(B_x\vec{u}_x + B_y\vec{u}_y + B_z\vec{u}_z\right)}{dt}$$

La direction de propagation est selon oz $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, alors on a :

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{dB_x}{dt}\vec{u}_x - \frac{dB_y}{dt}\vec{u}_y - \frac{dB_z}{dt}\vec{u}_z$$

Soit

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{dB_x}{dt} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{dB_y}{dt} \\ 0 = -\frac{dB_z}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = \int \frac{\partial E_y}{\partial z} dt \\ B_y = -\int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} B_x = -\frac{kE_0}{\omega} sin(\omega t - kz) \\ B_y = \frac{kE_0}{\omega} cos(\omega t - kz) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

On $k = \omega/c$, alors on a finalement :

$$\vec{B}(z,t) = -\frac{E_0}{c} sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$$

3- $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ E_x & E_y & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \left(E_x H_y - E_y H_x\right)\vec{u}_z$$

Sachant que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ et après quelques manipulations, on aura :

$$\vec{P} = E_0^2 \varepsilon_0 c \vec{u}_z$$

Exercice 4 :

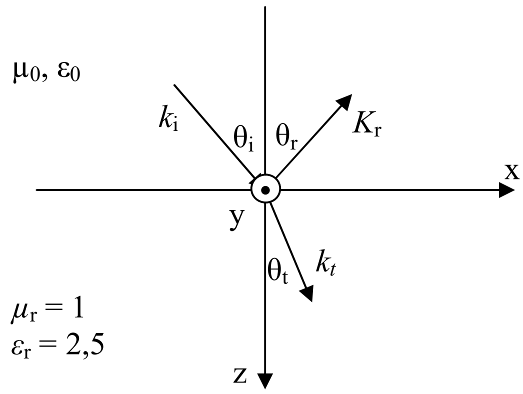
Une onde incidente spécifiée par le champ électrique :

$$\vec{E} = 8\cos(\omega t - 4x - 3z)\,\vec{u}_y \quad V/m$$

Cette onde tombe sur le plan z = 0 qui sépare deux milieux diélectriques non magnétiques sans pertes, le milieu 1 c'est l'air libre (ε_0, μ_0) localisé dans le demi espace des $z < 0$, le milieu 2 est caractérisé par $\varepsilon_r = 2.5$ et $\mu_r = 1$, localisé dans le demi espace des $z > 0$.

1. Déterminer la polarisation de l'onde.
2. Déterminer les angles d'incidence, de réflexion et de transmission.
3. Déterminer les facteurs de réflexion et de transmission.

Solution



1. La polarisation de l'onde est linéaire (intrinsèquement). Par rapport au plan d'incidence (plan xoz, car k_i appartient au plan xoz), $\vec{E}$ est selon Oy, donc la polarisation par rapport au plan d'incidence est *perpendiculaire*.
2. On a les relations de Descartes

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ n_1 sin\theta_i = n_2 sin\theta_t \end{cases}$$

A partir de la figure on peut voir que $tan\theta_i = \frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta_i = \theta_r = arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13°$

La deuxième relation de Descartes nous donne : $\theta_t = arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} sin\theta_i\right) = 30{,}39°$

3. Facteurs de réflexion et de transmission :

Pour une onde incidente polarisée perpendiculairement par rapport au plan d'incidence, le coefficient de réflexion est donné par

$$r_\perp = \frac{n_1 cos\theta_i - n_2 cos\theta_t}{n_1 cos\theta_i + n_2 cos\theta_t}$$

Soit $r_{\perp} = -0{,}388$

Le coefficient de transmission est relié au coefficient de réflexion par la relation :

$$t_{\perp} = 1 + r_{\perp}$$

Soit $t_{\perp} = 0{,}622$