Sur Les Fonctions Réelles d'une Variable réélle
Limite; Continuité; Dérivabilité
(Exercices corrigés)

Toufik HERAIZ
toufik.heraiz@univ-msila.dz

Faculté de Thechnologie. Université de M'sila

Janvier 2021

Exercice 01

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin px}{\sin qx}\right);\quad \lim_{x\to \pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right);\quad \lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right)$$

Exercic 02

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 0\\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x>0\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases} 1-\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

Exercice 03

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha x + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

1. Déterminer la valeur α pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition (pour la valeur de α trouvée)

Exercice 04

1. Montrer que:

a) $\arg\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, pour tout $x \geq 1$,

b) $\arg\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$.

c) $\forall x \in \left]-1, 1\right[: \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle $f(x) = \arcsin\left(2x^2\right)$, puis trouver $f^{/}(x)$

Exercice 01 (Les Limites)

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin px}{\sin qx}\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{px\sin px}{px}}{\dfrac{qx\sin qx}{qx}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{px}{qx}=1;$$

$$\lim_{x\longrightarrow \pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)=\lim_{x\longrightarrow \pi}\left(\frac{\sin(x)-\sin\pi}{x-\pi}\right)=\cos\pi=-1;$$

Exercice 01 (Les Limites)

$\lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right)$, rappeler que $\forall y \in \mathbb{R},\ y-1 < [y] \leq y$

Par exemple $[2,6] = 2$; $[3,6] = 3$, $[-3,6] = -4$,

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$, on multiple par x,

$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$, en passant à la limite, on obtient

$1 < \lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right) \leq 1$, alors $\lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right) = 1$.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right)$$ (Par la règle de L'Hôpital)

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\cos(x)-x\sin(x)-\cos x}{3x^2}\right)\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{-x\sin(x)}{3x^2}\right) &= \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Continuité, Dérivabilité)

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes:

1. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- **La continuité**

f est continue sur $\mathbb{R}^*$, en $x_0 = 0$
On calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Longrightarrow \begin{cases} -x^3 \leq x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^3 & \text{si } x > 0 \\ x^3 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
En passant à la limite on trouve $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
Alors f est continue en 0. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}$

- **La dérivabilité**

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, en $x_0 = 0$

On calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Longrightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

En passant à la limite on trouve $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Alors f est dérivable au 0. Ainsi elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$2 \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

- **La continuité**

g est continue sur $\mathbb{R}^*$, en 0

on calcule $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

On a $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} x+1 = 1 = g(0)$

et $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 0} g(x) = g(0)$

Alors g est continue en 0. Ainsi elle est continue sur $\mathbb{R}$

- **La dérivabilité**

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, au point 0

on calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

On a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{(x+1)-1}{x-0} = 1$

et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{x}$

$$= -\pi \sin\left(\frac{\pi(0)}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi(0)}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \neq \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ n'existe pas . Donc g n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$

3

$$h(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{x} + 1\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- **La continuité**

h est continue sur $\mathbb{R}^*$, en 0

On calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x)$

On a $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} h(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} 1 - \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) e^{-\frac{1}{x}} = \infty$

La limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x)$ n'existe pas alors h n'est pas continue en 0

$$h\left(x\right)=\begin{cases} 1-\left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

- **La Dérivabité**

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
Au point $x_0=0$, h n'est pas continue, alors elle n'est pas dérivable au point 0.

Exercice 3 (Continuité, Dérivabilité)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha x + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

1. Déterminer la valeur de α pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.

f est continue au point $x_0 = 1$ si $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \dfrac{x+1}{2} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \alpha x + 2$,

C'est à dire $1 = \alpha + 2$, donc $\alpha = -1$

2 Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition (pour la valeur de α trouvée)

- **La Dérivabité**

La fonction f devient $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

f est dérivable sur $[0,2] \setminus \{1\}$, mais au point $x_0 = 1$. On calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{\frac{x+1}{2}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{\frac{x-1}{2}}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

et $\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \dfrac{-x+2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$

$\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, la limite, alors, n'existe pas. Donc f n'est pas dérivable au point $x_0 = 1$.

Montrer que:

a) $\arg\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, pour tout $x \geq 1$,

Si on pose $\arg\cosh(x) = y$, alors $x = \cosh(y)$ pour tout $x \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}$
rappeller que
$\cosh(y) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Longrightarrow e^y + e^{-y} = 2x \Longrightarrow e^{2y} + 1 = 2xe^y$
(multiple par e^y)
Alors on a

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Si on pose $t = e^y$, on obtient: $t^2 - 2xt + 1 = 0$

Exercice 4

$$t^2 - 2xt + 1 = 0, \;\; t = e^y$$

$\triangle = 4x^2 - 4 = 4\left(x^2 - 1\right)$, comme $x \geq 1$ alors $\triangle \geq 0$ et $\sqrt{\triangle} = 2\sqrt{x^2 - 1}$

Ainsi, $\begin{aligned} t = t_1 &= \frac{2x - 2\sqrt{x^2-1}}{2} \\ &= x - \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$ ou $\begin{aligned} t = t_2 &= \frac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} \\ &= x + \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$

Donc $t = x + \sqrt{x^2 - 1} = e^y$ ce qui donne $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ avec $x \geq 1$

En remplaçant y on obtient

$$\arg\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \; x \geq 1$$

Exercice 4

Montrer que:

b) $\arg\tanh(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$.

Si on pose $\arg\tanh(x) = y$, alors $x = \tanh(y)$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et $y \in \mathbb{R}$

rappeller que

$$\tanh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \implies e^y - e^{-y} = \left(e^y + e^{-y}\right)x$$
$$\implies e^{2y} - 1 = x\left(e^{2y}+1\right)$$
$$\implies e^{2y} - xe^{2y} = x+1$$

Alors on a

$$e^{2y}\left(1-x\right)=x+1$$

Donc $e^{2y}=\dfrac{1+x}{1-x}$, avec $x\in\left]-1,1\right[$, ce qui donne $e^{y}=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
Ainsi

$$y=\arg\tanh\left(x\right)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in\left]-1,1\right[.$$

c) $\forall x \in \left]-1,1\right[: \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

On pose $\alpha = \arcsin(x)$
On sait que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, d'où
$\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$
Alors $\cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1$, ce qui donne $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
Et à la méthode, en posant $\alpha = \arccos(x)$,on obtient
$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. C.Q.F.D

Exercice 4

3 Déterminer le domaine de définition de la fonction réelle $f(x) = \arcsin\left(2x^2\right)$, puis trouver $f^{/}(x)$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq 2x^2 \leq 1\right\} =$

$-1 \leq 2x^2 \leq 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x^2 \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x^2 \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, d'où

$x \in \left[\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Donc $D_f = \left[\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

- **La Dérivabité**

Rappeler que la fonction arcsin est dérivable et $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Alors f est dérivable et $f^{/}(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}$

Exercice 4

$$f^{/}(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^{2}\right)^{2}}}$$

Exercice 5

1. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x \to 0$):
$$\frac{x}{(1+x)^n - 1}, \qquad \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{1-\cos x}{\tan x}.$$

Merci

.

«merci de votre attention»