Chapitre 3

Modélisation des systèmes asservis linéaires

1. Introduction

La phase de modélisation est essentielle dans le processus d'analyse et de synthèse d'un système de commande. En Automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est défini comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée.

La démarche globale peut ainsi se résumer de la manière suivante.

- Définir le système à étudier et ses composants élémentaires.
- Formuler le modèle mathématique idéal et dresser la liste des hypothèses à retenir.
- Ecrire les lois physiques régissant le comportement du système et les équations différentielles et algébriques associées.
- Définir le modèle dédié à l'Automatique.

2. Représentation par une équation différentielle

Un système est dit linéaire si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme générale de cette équation différentielle est :

$$b_0 s(\mathrm{t}) + \mathrm{b}_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(\mathrm{t}) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

(3.1)

On appelle l'ordre de l'équation (3.1) (n), l'**ordre du système linéaire**.

Seuls les systèmes pour lesquels $m \le n$ se rencontrent dans la pratique.

Exemple (Exemple d'un circuit électrique)

On considère le circuit électrique, représenté à la figure 3.1, comportant en série : une résistance R , une inductance L , et une capacité C . L'entrée est la tension $e(t)$ appliquée aux bornes du circuit. La sortie est la tension $s(t)$ aux bornes de la capacité. Déterminons la relation entrée/sortie.

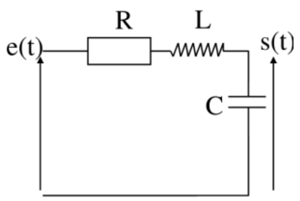


Figure 3.1. Circuit RLC série.

L'équation électrique du système est :

$$e(\mathrm{t}) = Ri(\mathrm{t}) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \tag{3.2}$$

La sortie est définie par $s(t) = \frac{q(t)}{C}$. En dérivant cette égalité, on obtient : $i(t) = C\frac{ds(t)}{dt}$, qu'on injecte dans (3.2) dérivée par rapport à *t*, pour obtenir l'équation différentielle du système:

$$e(\mathrm{t}) = LC\frac{d^2 s(\mathrm{t})}{dt} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) \tag{3.3}$$

On observe que cette équation différentielle est linéaire, à coefficients constants, et le degré de dérivation de *e*(*t*) est strictement inférieur à celui de *s*(*t*). Autrement dit, le système décrit est linéaire, causal et invariant dans le temps.

3. Modélisation des systèmes dans l'espace d'état

La représentation d'état d'un système dynamique linéaire est un modèle par lequel non seulement la relation *entrée-sortie* entre *e*(*t*) et *s*(*t*) est déterminée, comme c'est déjà le cas avec l'équation différentielle d'ordre *n*,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(\mathrm{t}) = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(\mathrm{t}) \tag{3.4}$$

mais également le comportement des grandeurs internes $x_1 \cdots x_n$ au système, appelées **variables d'état**.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\ \cdots = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u \end{cases} \tag{3.5}$$

Les variables d'état $x_1 \cdots x_n$ sont au nombre de *n*, *n* étant l'ordre du système. Les *n* équations différentielles d'ordre 1 sont les **équations d'état** du système.

Le jeu de *n* équations différentielles ci-dessus doit en principe être complété par une équation définissant la relation entre les grandeurs d'état $x_1(t)$ à $x_n(t)$ et la sortie *y*(*t*) du système :

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + du \tag{3.6}$$

Il s'agit de l'**équation d'observation**, dans laquelle le signal de sortie $y(t)$ apparaît comme une combinaison linéaire des états $x_1(t)$ à $x_n(t)$.

De manière alternative, la dynamique d'un système linéaire invariant d'entrée u et de sortie y peut être décrite par une représentation sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{3.7}$$

avec A, B, C et D des matrices constantes et x un vecteur de dimension n, appelé vecteur d'état.

- La matrice A de dimension n×n est appelée matrice d'évolution (ou encore matrice d'état).
- La matrice B de dimension n×1 est appelée matrice de commande (ou encore matrice d'entrée).
- La matrice C de dimension 1×n est appelée matrice d'observation, car elle permet de relier la sortie à l'état.
- Le scalaire D est le coefficient de transmission directe qui relie directement la commande à la sortie. Dans le cas ou D = 0, m < n et le système est dit strictement propre.

Exemple :

On considère le système électrique ci-dessous :

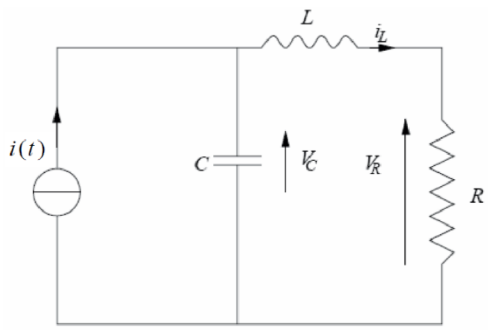


Figure 3.2. Circuit RLC parallèle.

Les équations électriques du système sont :

$$\begin{cases} C\dfrac{dv_c(t)}{dt} = i(t) - i_L(t) \\ L\dfrac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(t) + v_c(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

On choisit deux variables indépendantes du système : $x_1(t) = V_c(t)$; $x_2(t) = i_L(t)$; $u(t) = i(t)$

Les équations différentielles précédentes peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -\dfrac{1}{C}x_2(t) + \dfrac{1}{C}u(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \dfrac{1}{L}x_1(t) - \dfrac{R}{L}x_2(t) \end{cases} \tag{3.9}$$

Sous forme matricielle donnent :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.10}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on considère que la sortie du système est la tension aux bornes de la résistance :

$$v_R(t) = y(t) = Ri_L(t) = \mathrm{R}x_2(t)$$
(3.11)

Donc, la sortie s'écrit :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{3.12}$$

avec :

$$C = [0 \quad R] \quad \text{et} \quad D = [0]$$

Remarque :

La représentation d'état n'est pas unique pour un même système physique.

3.1. Schéma fonctionnel d'une représentation d'état

Les schémas fonctionnels peuvent aussi servir à donner une image graphique des modèles dans l'espace d'état.

La figure 3.3 présente le Schéma fonctionnel d'une représentation d'état.

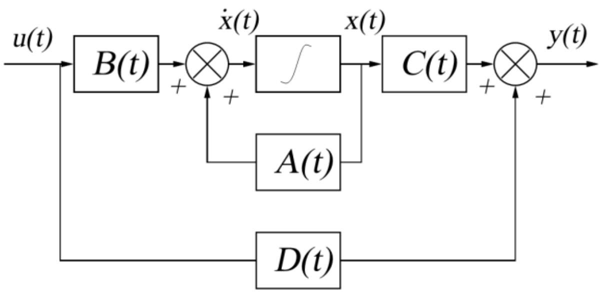


Figure 3.3. Schéma fonctionnel d'une représentation d'état.

4. Représentation par fonction de transfert

On peut donner d'un système linéaire invariant mono-entrée mono-sortie une représentation externe simple obtenue par transformation de l'équation différentielle entrée- sortie en une équation algébrique. Pour cela on utilise la transformée de Laplace que l'on va tout d'abord définir.

Soit un système linéaire invariant d'entrée *u* et de sortie *y*. On appelle *fonction de transfert* du système le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, à conditions initiales nulles :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \tag{3.13}$$

Le terme de *transmittance,* synonyme de fonction de transfert est parfois utilise. Il est important de remarquer que la notion de fonction de transfert est associée à un système possédant des conditions initiales nulles. L'étude du comportement du système lorsque les conditions initiales sont non nulles est plus complexe, notamment dans le cas de système d'ordre élevé.

Exemple (système masse-ressort-amortisseur)

Soit le système mécanique masse-ressort-amortisseur de la figure 3.4. Par application du principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle décrivant le comportement de la masse *M* soumise à une force *u*(*t*) est donnée par :

$$M\,\frac{d^2y(t)}{d^2t} + f\,\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \tag{3.14}$$

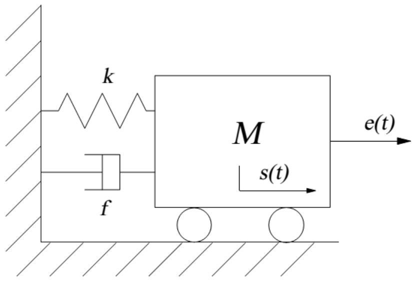


Figure 3.4. Système masse-ressort-amortisseur.

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position de la masse *y*(*t*) comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de *Y* (*p*) sur *U*(*p*) :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + k} \tag{3.15}$$

5. Les modèles graphiques

Un système peut être constitué d'un grand nombre de composants élémentaires dont la fonction est donnée. Afin de rendre claire et lisible la fonction de chaque composant d'un ensemble complexe, des outils graphiques de modélisation peuvent être utilisés.

5.1. Schéma fonctionnel et fonctions de transfert

Le schéma fonctionnel est très étroitement associé aux fonctions de transfert. Dans ce cas, une procédure systématique de tracé du schéma fonctionnel d'un système donné peut être proposée.

Principes de construction

- Ecrire les équations de la physique associées à chaque élément constituant le système.
- En appliquant la transformée de Laplace, calculer la fonction de transfert associée à chaque élément en supposant les conditions initiales nulles.
- Identifier les relations inter-signaux et les relations signaux-blocs pour tracer le schéma fonctionnel.

Exemple

Soit le circuit électrique RC :

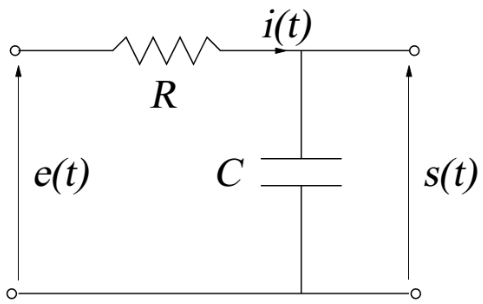


Figure 3.5. Circuit RC.

- Les équations électriques donnent :

$$e(t) - s(t) = Ri(t) \tag{3.16}$$

$$s(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \tag{3.17}$$

- Application de la transformée de Laplace et détermination des fonctions de transfert élémentaires :

$$V_R(p) = E(p) - S(p) = RI(p) \tag{3.18}$$

$$S(p) = \frac{1}{Cp}I(p) \tag{3.19}$$

- Tracé du schéma fonctionnel :

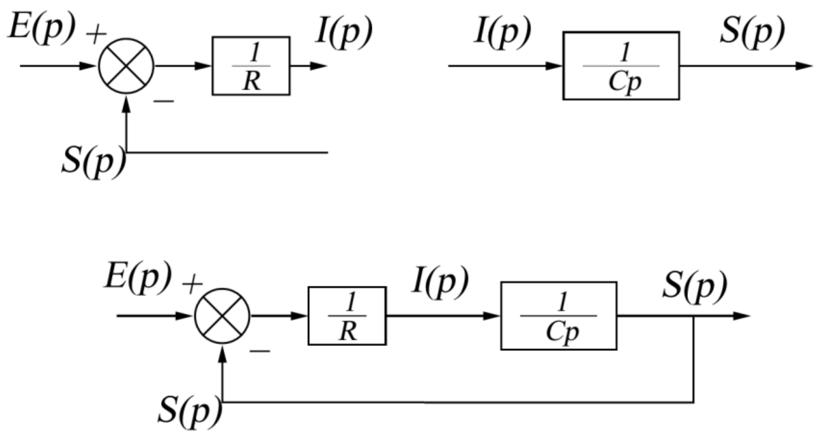


Figure 3.6. Schéma fonctionnel.

Fonction de transfert en boucle fermée

Soit un système asservi, le plus général, représenté par le schéma de la fig. 3.6.

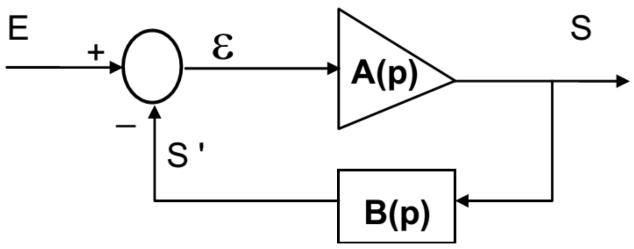


Figure 3.7. Asservissement à contre-réaction.

Soit A(p) et B(p), respectivement, les fonctions de transfert des chaînes directe et de retour.

La fonction de transfert en boucle fermée est définie comme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \tag{3.20}$$

Un cas particulier que l'on rencontre fréquemment est celui des systèmes bouclés à retour unitaire.

Un système bouclé est dit **à retour unitaire** si le transfert de la chaine de retour est égal à un. La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} \tag{3.21}$$

Fonction de transfert en boucle ouverte

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte est la fonction de transfert qui lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaîne de retour S'(p) à l'erreur $\varepsilon(p)$. Elle correspond à l'ouverture de la boucle (Fig. 3.8) :

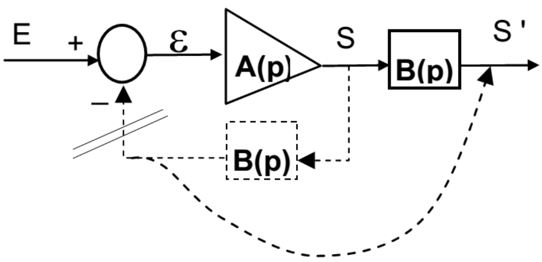


Figure 3.8. Schéma fonctionnel d'un système asservi en Boucle Ouverte.

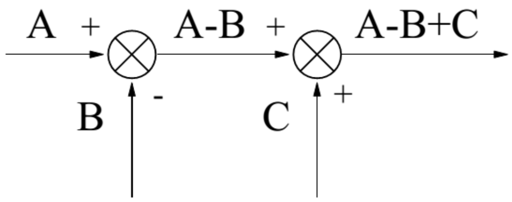
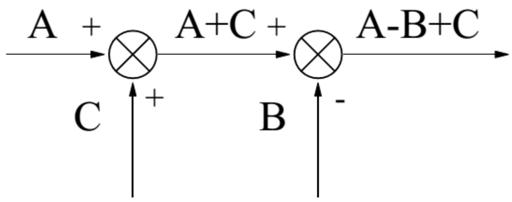
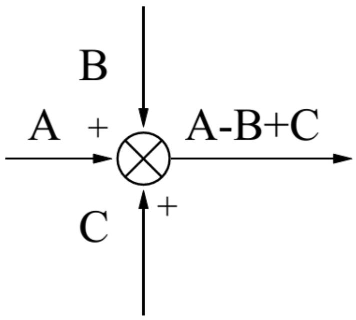
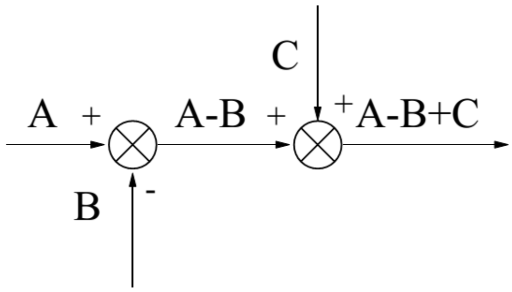
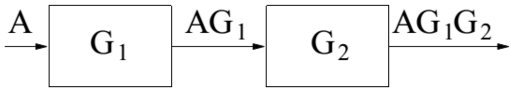
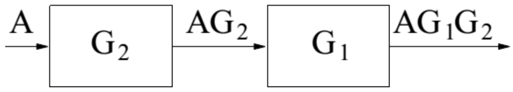
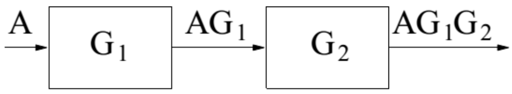
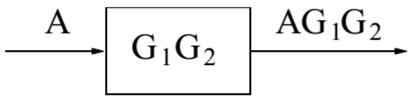
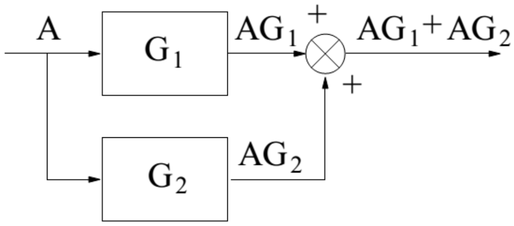
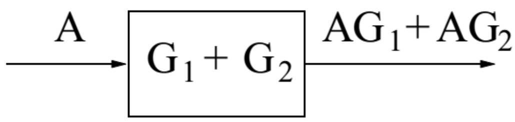
La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme :

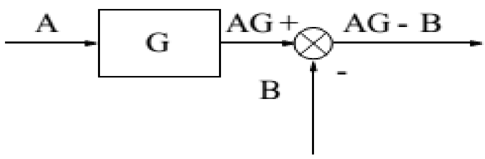
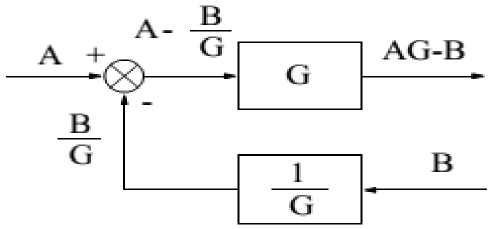
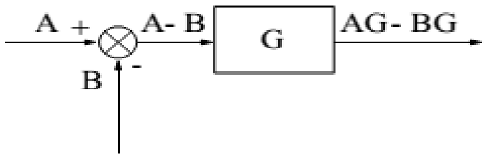
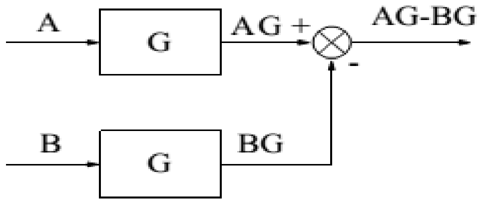
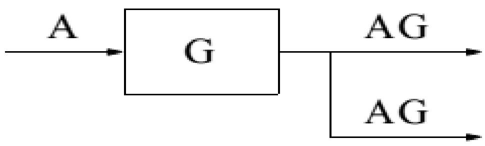
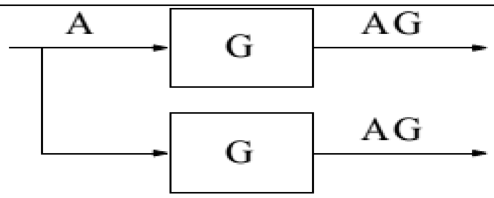
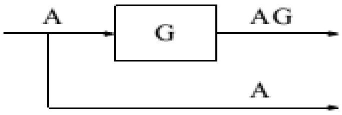
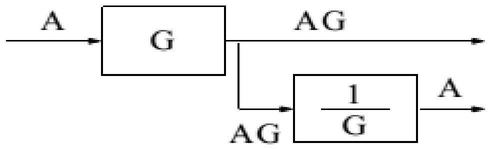
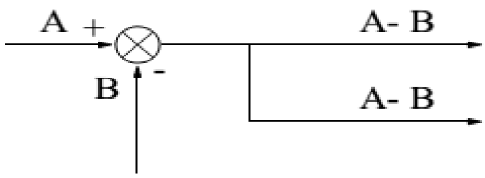
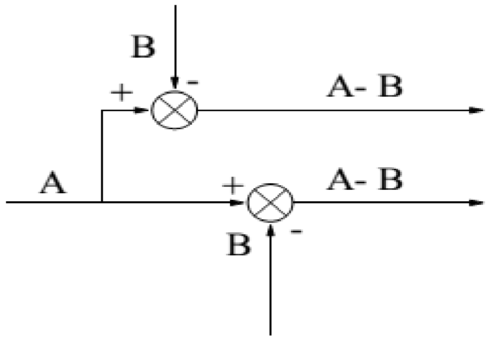
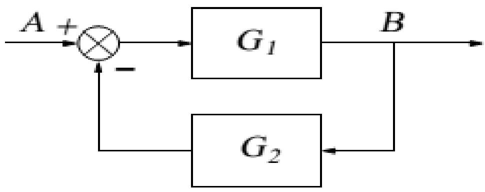
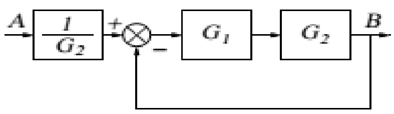
$$\frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p) \tag{3.22}$$

5.2. Règles d'algèbre dans les schémas fonctionnels

Quand le système est complexe, le schéma fonctionnel peut comporter un nombre important de blocs et de boucles. On dispose alors d'un certain nombre de règles permettant de le simplifier en agrégeant les blocs et en réduisant les boucles. Ces règles sont résumées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1. Algèbre des schémas fonctionnels.

<table>
<tr><th></th><th>Schéma de départ</th><th>Schéma équivalent</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

6	A G AG + AG - B B -	A + A - $\frac{B}{G}$ G AG-B - $\frac{B}{G}$ $\frac{1}{G}$ B
7	A + A- B G AG- BG B -	A G AG + AG-BG - B G BG
8	A G AG AG	A G AG G AG
9	A G AG A	A G AG AG $\frac{1}{G}$ A
10	A + A- B B - A- B	B + - A- B A + A- B B -
11	A + G_1 B – G_2	A $\frac{1}{G_2}$ + – G_1 G_2 B