CHAPITRE I : LA CONVECTION THERMIQUE

(Thermal convection, الحمل الحراري)

I.1 Introduction

La convection est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente. Elle peut être naturellement induite ou forcée.

Convection naturelle

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensives telles que la température (« convection thermique »), la concentration d'un soluté (« convection solutale ») ou la tension superficielle (« convection thermo-capillaire »).

Un exemple de convection thermique naturelle est celui ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il y a existence de courants de fluide dans l'air ambiant.

Convection Forcée

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe , turbine, ventilateur.....ect) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée: : chauffage central avec accélérateur, La circulation sanguine dans le corps humain....ect.

I.2 Définition

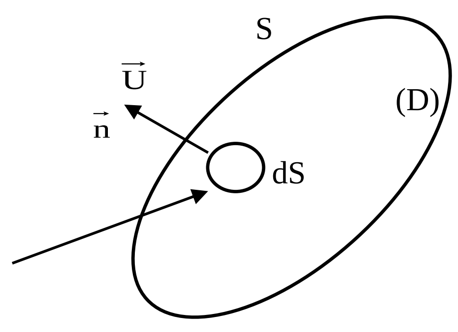
Différence totale d'une fonction:

Soit f une fonction scalaire dérivable par rapport aux variables (t,x,yz).

La différence totale de cette équation est donnée par:

$$\mathrm{df} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{df}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} + \vec{U}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f} \qquad (1)$$

I.3 Equation de continuité (ou de la conservation de la masse)



Soit une partie d'un fluide de masse volumique **ρ** délimitée par une surface par une surface **S** fermée de volume V.

- la partie de fluide à une masse $m = \iiint \rho . dV$ **(2)**
  si **ρ= Cte → m= ρ.V**

- selon l'équation (1), la variation de la masse (**m**) pendant dt s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}(m) \qquad (3)$$

- le terme ($\vec{U}.\overrightarrow{grad}(m)$) représente le débit massique en (kg/s)

on peut écrire donc : $\vec{U}.\overrightarrow{grad}(m) = \iint_{s} -\rho.\vec{U}.\vec{n}.ds$ (4)

le signe (-) est introduit afin que le flux entrant soit compté positive

- et le terme ($\frac{\partial m}{\partial t}$) représente la création de la masse instantané
- Remplaçant les équations (2) et (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{s} \rho.\vec{U}.\vec{n}.ds \qquad (5)$$

en utilisant le théorème d'Ostrogorski

$$\iint_{s} \rho.\vec{U}.\vec{n}.ds = \iiint_{V} div(\rho i \vec{U}).dV \qquad (6)$$

En remplaçant l'équation (6) dans l 'équation (5) :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{V} div(\rho.\vec{U}).dV = \iiint_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) \right].dV \qquad (7)$$

- Le principe de la conservation de la masse nous permet d'écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) \right].dV = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) = 0} \qquad (8)$$

Cette équation est appelé l'équation de continuité

I.3.1 Cas particuliers:

a) Ecoulement stationnaire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \boxed{div(\rho \vec{U}) = 0}$$

b) Ecoulement incompressible (ρ=cte)

la masse volumique est constante dans tout le fluide est indépendante du temps :

$$\boxed{div(\vec{U}) = 0}$$

I.3 Equation du mouvement (ou de la conservation du quantité du mvt)

عئاملا نا الموجود في المجال (D) والمحدد بالمساحة (S) سيكون تحت تأثير قوى مؤثرة عليه هي القوة الكتلية في وحدة الحجم وأخرى قوى إجهاد مماسية ناتجة عن لزوجة المائع وهي بمثابة قوى احتكاك بين جزيئاته (contraintes de cisaillement) وضغط ناظمي (قوى الضغط) تؤثران على المساحة ونرمز لها بالرمز $\vec{T}$.
بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على الكتلة الموجودة داخل المجال نحصل على:

$$m.\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rightarrow \iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iint \vec{T}.\vec{ds} \qquad (10)$$

avec $\vec{T} = \vec{\sigma}.\vec{n}$

$\vec{n}$: vecteur unitaire normale à la surface

$\vec{\sigma}$: tenseur des contraintes ;

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

les composantes des tenseur des contraintes ($\sigma_{i,j}$) dépendent en générale par les variables essentielles comme la pression et la vitesse.

تكون مركبات تنسور الإجهاد ($\sigma_{i,j}$) على العموم متعلقة بالمتغيرات الأساسية منها الضغط والسرعة

Remarque : $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$ c'est-à-dire $\sigma_{x,y} = \sigma_{y,x}$, $\sigma_{x,z} = \sigma_{z,x}$, $\sigma_{z,y} = \sigma_{y,z}$

$$\rightarrow \iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iint \vec{\sigma}.\vec{n}.ds \qquad (10)$$

et $\iint \vec{\sigma}.\vec{n}.ds = \iiint div(\vec{\sigma}).dV$ Théorème d'Ostrogorski

L'équation (9) devienne alors: $\iiint \rho.dV.\frac{d\vec{U}}{dt} = \iiint \rho.\vec{F}.dV + \iiint div(\vec{\sigma}).dV$

Comme le volume est arbitraire, on peut écrire:

$$\rho.\frac{d\vec{U}}{dt} = \rho.\vec{F} + div(\vec{\sigma}) \qquad (11)$$

$$div(\vec{\sigma}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}$$

في حالة الموائع اللزجة التي تخضع لعلاقة نيوتن فان :

$$(12)\ \sigma_{i,j} = -p.\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{i,j}.div(\vec{U})$$

ou **p** est la pression et $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

λ et μ sont les coefficients de Lami (viscosité)

- **Stocks** a trouvé une relation entre λ et μ tel que: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

La partie suivante de l'équation **(12)**

$\tau_{i,j} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{i,j}.div(\vec{U})$ est appelée tenseur des contraintes de la viscosité du fluide

D'après ces données, l'équations (11) devienne :

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu div(\vec{U})\right) \quad \textbf{(13)}$$

ou i =(x ou y ou z)

C'est l'équation générale du mouvement

I.3.1 Quelques cas particuliers

1) Fluide incompressible (ρ=cte)

Dans ce cas là, et d'après l'équation de continuité→ $div(\vec{U}) = 0$

L'équation **(13)** →
$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) \quad (14)$$

2) Fluide incompressible avec une viscosité constante (μ=cte)

L'équation **(12)** →
$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + \mu.\Delta.u_i \quad \textbf{(15)}$$

Avec $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{U}.\overrightarrow{grad}u_i$

3) Fluide parfait (μ=0)

L'équation du mouvement pour un fluide parfait (μ=0) dite aussi équation **d'Euler** s'écrit donc sous la forme :

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i$$

Si l'écoulement est dimensionnelle suivant ox et oy , l'équation (15) peut s'écrire :

Suivant (ox) : $\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho.F_x+\mu.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (16)

Suivant (oy) : $\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho.F_y+\mu.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ (17)

Remarque: Dans la convection thermique **(** $\rho.F_i=\rho.g_i$ **)**

I.4 Equation de conservation de l'énergie

ان دراسة الحمل الحراري تتطلب معرفة تغير درجة الحرارة داخل المائع , لهذا يجب علينا كتابة معادلة انحفاظ الطاقة والتي نحصل عليها بتطبيق المبدأ الأساسي للترموديناميك للمائع المتحرك .ونص هذا المبدأ هو أن التغير في الطاقة الكلية (الطاقة الحركية +الطاقة الداخلية) بالنسبة للزمن للمائع بين حالتي توازن يساوي الى الجمع بين عمل القوى الخارجية وكمية الحرارة المكتسبة من قبل كمية المائع .

$$\frac{dE_T}{dt}=\frac{d}{dt}(E_{int}+E_{cinétique})=W(F_{ext})+Q \quad (18)$$

لنفرض ان **e** تمثل الطاقة الداخلية في وحدة الكتلة لكمية المائع .
اذن فان المعادلة السابقة الخاصة بالمبدأ الاول للترموديناميك الحرارية تكتب على النحو التالي :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V(e.dm+\frac{1}{2}U^2dm)=\iiint_V \vec{F}.\vec{U}dm+\iint_s \vec{T}\vec{U}.\vec{ds}+\iint_s k.\overrightarrow{grad}T.\vec{ds}$$

tel que: **dm**= ρdV ; ***k*** est le conductivité thermique du fluide ;
$\vec{U}$ est le vecteur vitesse, $\vec{T}$ est la contrainte de surface (force de pression et des contraintes de cisaillement due au frottement entre les molécules du fluide

$$\iiint_V \rho\frac{de}{dt}dV+\iiint_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right)dV=\iiint_V \rho.\sum_i F_i.u_i.dV+\iint_s\sum_i u_i.\sigma_{i,j}.n_j ds+\iiint_V div(k.\overrightarrow{grad}.T).dV \quad \textbf{(19)}$$

بعد تحويلات متعددة على المعادلة (19) **(انظر للملحق annexe في أخر هذا الفصل)** ’ فانه يمكننا الحصول على المعادلة العامة للطاقة كالتالي :

$$\textbf{(20)}\ \rho cp\frac{dT}{dt}=div(K.\overrightarrow{grad}T)+\beta.T.\frac{dp}{dt}+\Phi$$

(*équation générale de la conservation de l'énergie*)

coefficient d'expansion volumique à P=cte $\beta=-\frac{1}{\rho}.\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{P=cte}$ **tel que:**

Cp : chaleur spécifique (J/Kg)

K: conductivité thermique du fluide
Φ : fonction de dissipation (دالة التبديد)
tel que:

$$\Phi = \mu.\sum_{i,j}^{3}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\mu\left(\operatorname{div}\vec{U}\right)^2 \qquad (21)$$

est la fonction de dissipation de l'énergie cinétique sous forme de chaleur due au frottement visqueuse entre les molécules du fluide.

Par exemple, dans les coordonnées **(x,y)** , Φ s'écrit :

$$\Phi = 2\mu.\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\mu.\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\mu\left(\operatorname{div}\vec{U}\right)^2 \qquad (22)$$

avec $\left(div\vec{U}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$

Remarque

1) pour les gaz : $\beta=\frac{1}{T}$

2) dans les cas des liquides: le terme (βT) est test faible , on peut négliger le terme ($\beta T\frac{dp}{dt}$) de l'équation (20).

3) dans le cas où (k=cte) $\rightarrow$ div(K.grad T)= K.Δ T, l'équation (20) devienne :

$$\rho cp\frac{dT}{dt}=k\Delta T+\beta.T.\frac{dp}{dt}+\Phi \qquad (23)$$

avec:

$$\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}p$$

Cas particuliers:

1) cas où le régime est stationnaire :

$$\rho cp.\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T=k\Delta T+\beta.T.\vec{U}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}P+\Phi$$

2) dans le cas où l'effet de viscosité est très faible , dans ce cas là, la fonction de dissipation est négligeable

3) Si le fluide est au repos ($U_i=0$)

$$\rho c p \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$ (le transfert est par conduction dans le fluide)

et si le régime est permanant dans les fluides au repos, donc:
$\Delta T = 0$ équation de Laplace

من هنا نستنتج ان الحمل الحراري يكون داخل الموائع المتحركة وان الحد الاساسي الذي يعبر عن هذه الظاهرة هو : $\vec{U}\,\overrightarrow{\text{grad}}T$ اضافة الى تاثير اللزوجة المتمثلة في دالة التبديد Φ
ومن هنا يمكننا ان نلخص ظاهرة الحمل الحراري بمعادلات الانحفاظ التالية :

Equation de continuité: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{U}) = 0$$

Equation de mvt; $$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + \mu.\Delta.u_i$$

Equation de l'énergie: $$\rho c p \frac{dT}{dt} = k\Delta T + \beta.T.\frac{dp}{dt} + \Phi$$

La solution de ces équations nous permet de déterminer le champ des vitesses et de température.

Annexe A ملـــــحق

de L'équation (19)

$$\iiint_V \rho \frac{de}{dt} dV + \iiint_V \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right) dV = \iiint_V \rho.\sum_i F_i.u_i.dV + \iint_s \sum_i u_i.\sigma_{i,j}.n_j ds + \iiint_V div(k.\overrightarrow{grad}.T).dV \quad (19)$$

On intègre cette équation sur tout le volume, on a:

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U^2\right) = \rho \sum F_i.u_i. + div(u_i.\sigma_{i,j}) + div(k.\overrightarrow{grad}.T) \quad (A1)$$

L'enthalpie **h** par unité de masse du fluide est définie par :

$$h = e + P/\rho \quad (A2)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d(e + p/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(p/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \quad (A3)$$

de l'équation de continuité : $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \mathrm{div}(\vec{u})$

On remplace dans (A3) on trouve: $\frac{dh}{dt} = \frac{d(e + P/\rho)}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(P/\rho) = \frac{de}{dt} - \frac{P}{\rho}\mathrm{div}(\vec{u}) + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} + (\frac{p}{\rho})\mathrm{div}(\vec{u}) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \qquad \text{(A4)}$$

L'enthalpie est une fonction de T et P , h= f(T,P) donc:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dt} = Cp\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta.T\right)_p \frac{dP}{dt} \qquad \text{(A5)}$$

remplaçant (A5) dans (A4) on trouve:

$$\rho\frac{de}{dt} = \rho Cp\frac{dp}{dt} - \beta T\frac{dp}{dt} + P\mathrm{div}(\vec{u}) \qquad \text{(A6)}$$

de l'éq. (A1) on peut écrire aussi:

$$\rho\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}U^2) = \rho U_i \frac{dU_i}{dt} \qquad \text{(A7)}$$

remplaçant maintenait (A6) et (A7) dans l 'eq. (A1)

$$\rho Cp\frac{dp}{dt} - \beta T\frac{dp}{dt} + P\mathrm{div}(\vec{u}) + \rho U_i \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i.u_i. + \sum \frac{\partial(u_i.\sigma_{i,j})}{\partial x_j}) + \mathrm{div}(k.\overrightarrow{\mathrm{grad}}.T) \qquad \text{(A8)}$$

avec: $\sigma_{i,j} = -p.\delta_{i,j} + \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i,j}.div(\vec{U})$

Rappelant que l' équation du mvt (**13**) est donnée par:

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i + div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu div(\vec{U})\right)$$

Si on multiple cette équation par U_i , on obtient:

$$\rho.u_i\frac{du_i}{dt} = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho.F_i u_i + u_i div(\mu.\overrightarrow{grad}u_i) + u_i div\left(\mu\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu div(\vec{U})\right)$$

(A9)

remplaçant maintenant l'équation (A9) dans l'équation (A8), on trouve l'équation **(20)** de l'énergie suivante:

$$\rho cp\frac{dT}{dt} = \mathrm{div}(K.\overrightarrow{\mathrm{grad}}T) + \beta.T.\frac{dp}{dt} + \Phi$$