تمارين محلولة:

التمرين الأول:

أ - فيم يتجلى الفرق بين التقدير النقطي والتقدير بفترة ؟

ب - ما هي شروط التقدير الجيد ؟

ج - متى يتم استخدام توزيع ستيودنتلإيجاد فترة الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم؟ وماهي الحالة التي يمكن فيها استخدام التوزيع الطبيعي رغم مجهولية تباين المجتمع ؟

د - ماذا يقصد بدرجات الحرية ؟ وضح بمثال.

حل التمرين الأول:

أ - التقدير النقطي لمعلمة مجتمع ما (وليكن مثلا متوسط المجتمع) هو قيمة عددية مفردة تقدر بها تلك المعلمة، أما التقدير بفترة هو إيجاد تقدير نقطي لمعلمة المجتمع، ومن ثم استعمال هذا المقدار لإيجاد حدود المجال بالاعتماد على توزيع احتمالي لهذا المقدر وعلى معامل الثقة.

ب - يكون التقدير جيدا إذا توفرت الشروط التالية:

1. عدم التحيز: يقال للتقدير $\hat{}$ أنه تقدير غير متحيز للمعلمة θ إذا كانت القيمة المتوقعة للتقدير $\hat{}$ تساوي قيمة المعلمة.
2. الاتساق: يقال بأن $\hat{\theta}$ مقدر متسق لمعلمة المجتمع إذا كانت $\hat{\theta}$ تؤول إلى θ، (أي تقترب منها) كلما زاد حجم العينة.
3. الكفاءة: إذا كان لدينا مقدرين $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$ لمعلمة المجتمع θ وكان المقدران غير متحيزين ومتسقين، فإن الاختيار بينهما يكون على أساس التباين الأقل، حيث يتم حساب الكفاءة النسبية عن طريق العلاقة التالية:

$$\text{الكفاءة النسبية} = \frac{var\ (\hat{\theta}1)}{var\ (\hat{\theta}2)}$$

فإذا كانت قيمة الكفاءة النسبية أقل من الواحد الصحيح فإن $\hat{\theta}_1$ يكون مقدرا ذي تباين أقل من $\hat{\theta}_2$ ويكون هو الأكفأ، وإذا كانت النسبة أكبر من الواحد فإن $\hat{\theta}_2$ يكون هو الأكفأ.
فالتباين الأقل هو الأكثر تركيز وأقل تشتتا وبالتالي هو الأكثر جودة.

4. الكفاية. يقال بأن مقدر $\hat{\theta}$ هو مقدر كاف إذا استخدم في حساب قيمته كل معلومات المعلمة θ والتي تتوافر في العينة.

فبالنسبة لمقاييس النزعة المركزية الثلاث: الوسيط والمنوال والوسط الحسابي، نجد أن الوسيط لا يستخدم في حسابه سوى قيم المفردات التي تقع في وسط العينة، كذلك الأمر بالنسبة للمنوال حيث يتم الاعتماد على القيم الأكثر شيوعا عند حسابه، أما الوسط الحسابي فإنه يأخذ بعين الاعتبار كل القيم عند حسابه، ولهذا يعتبر المتوسط الحسابي مقدرا كافيا لمعلمة المجتمع μ.

ج- يتم استخدام توزيع ستيودنت لوسط المجتمع غير المعلوم عندما يكون توزيع المجتمع طبيعيا وتباينه غير معلوم وحجم العينة صغيرا أي أقل من 30.

أما الحالة التي يمكن فيها إيجاد فترة الثقة بالاعتماد على التوزيع الطبيعي عندما يكون المجتمع مجهول التوزيع وتباينه مجهولا عندما يكون حجم العينة كبيرا، وذلك بالاعتماد على نظرية النهاية المركزية.

د- يقصد بدرجات الحرية عدد القيم التي لنا الحرية في اختيارها، فمثلا: إذا كانت لدينا عينة من مفردتين، ونعلم أن متوسطها هو 6 ، فإننا نملك الحرية في تحديد قيمة مفردة واحدة منها، فإذا كانت قيمة المفردة الأولى هي 7 فإن قيمة المفردة الثانية يجب أن تكون 5 حت يكون المتوسط هو 6.

فدرجات الحرية هنا هي: . $\nu = n - 1 = 2-1 = 1$

كما تعرف أيضا بأنها العدد n من المشاهدات المستقلة في العينة مطروحا منها العدد k لمعالم المجتمع . أي أن: $\nu = n - k$.

التمرين الثاني:

مجتمع طبيعي حجمه 800 وتباينه 625، تم سحب عشوائية منه حجمها 25 فكان وسطها هو 100.

أ - أوجد فترات الثقة لوسط المجتمع غير المعلوم عند المستويات التالية: 90%، 95%، 99%.

ب - ما هو طول الفترة في حالة مما سبق؟

ج - ما هو تعليقك على النتائج الثلاث؟

حل التمرين الثاني:

أ - لدينا:

$$N = 800 , n = 25 , \overline{X} = 100 . \sigma^2 = 625 \implies \sigma = 25 . ;$$

وحيث أن $\frac{n}{N} = \frac{25}{800} = 0.031 < 0.05$ فإنه يتم إهمال معامل الإرجاع في حساب قيمة الانحراف المعياري.

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم فإننا نستعمل معامل الثقة Z في تحديد فترات الثقة كما يلي:

$$\begin{cases} 1-\alpha = 0.90 \\ 1-\alpha = 0.95 \\ 1-\alpha = 0.99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha/2 = 0.05 \\ \alpha/2 = 0.025 \\ \alpha/2 = 0.005 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.645 \\ Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \\ Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.58 \end{cases}$$

وتكون فترات الثقة في كل حالة مما سبق كما يلي:

1 - عند

مستوى الثقة 90%.

فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[100 - 1.645\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}} \; ; 100 + 1.645\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[91.775\,;108.225]$

2 - عند

مستوى الثقة 95%.

بعد التعويض نجد:

$$\left[100 - 1.96\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}} \; ; 100 + 1.96\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[90.2\,;109.8]$

3 - عند

مستوى الثقة 99%.

بعد التعويض نجد:

$$\left[100 - 2.58\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}} \; ; 100 + 2.58\, X\ {}^{25}/_{\sqrt{25}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[87.1\,;112.9]$

ب - طول الفترة عند مستويات الثقة الثلاث:

عند مستوى ثقة 90%: $108.225 - 91.775 = 16.45$

عند مستوى ثقة 95%: $109.8 - 90.2 = 19.6$

عند مستوى ثقة 99%: $112.9 - 87.1 = 25.8$

ج- تشير نتائج فترات الثقة عند المستويات الثلاث أن طول فترة الثقة يزداد مع زيادة مستوى الثقة المطلوبة ويصبح التقدير بفترة بدقة أقل.

التمرين الثالث:

ترغب إدارة جامعة المسيلة في تقييم جودة التعليم من منطور الأساتذة البالغ عددهم 1389 أستاذا، حيث قامت خلية جودة التعليم بالجامعة بتوزيع 100 استمارة ذات سلم ليكارت الخماسي على عينة عشوائية من الأساتذة فوجد أن متوسط العينة هو 2.85 بانحراف معياري 1.05 .

- أوجد فترة ثقة 95 % لوسط أساتذة الجامعة غير المعلوم.

حل التمرين الثالث:

لدينا: $N= 1389, n = 100, \overline{X} = 2.85 ; S = 1.05 ; 1-\alpha = 0.95.$ X~ ?

بما أن حجم العينة كبير فإنه يمكن الاستناد إلى نظرية النهاية المركزية والاعتماد على الانحراف المعياري للعينة في تحديد مجال الثقة لمتوسط أعمار المصابيح عند مستوى 95%كما يلي:

وحيث أن $\frac{n}{N} = \frac{100}{1389} = 0.072 > 0.05$ فإنه لا يتم إهمال معامل الإرجاع في حساب قيمة الانحراف المعياري.

1 - مستوى الثقة هو 95%.

2 - 1-

$$\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}$.= 1.96

3 - فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-\mathrm{n}}{N-1}}\ ;\ \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-\mathrm{n}}{N-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[2.85 - 1.96\,X\ \frac{1.05}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1389-100}{1389-1}}\ ;2.85 + 1.96\,X\ \frac{1.05}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1389-100}{1389-1}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[2.83\ ;\ 2.87]$.

التمرين الرابع:

شركة مختصة في نقل المسافرين تريد تقدير المدة المستغرقة من طرف حافلاتها في خط محدد فقامت بمعاينة عشوائية لإحدى الحافلات وتم تسجيل الفترات التي تقضيها خلال كل رحلة بالدقائق، فكانت كما يلي:

100، 102، 98، 96، 103، 104، 97، 92.

1 - قدر نقطيا
معدل الفترة التي تستغرقها حافلاتها خلال الرحلة.

2 - قدر نقطيا
الانحراف المعياري للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة.

3 - بافتراض
أن فترات الرحلات تتبع التوزيع الطبيعي، أوجد فترة ثقة 90 % لمعدل فترة جميع الرحلات التي تقضيها حافلاتها من نفس الخط.

حل التمرين الرابع:

1 - **التقدير**

النقطي لمعدل الفترة المستغرقة خلال الرحلة:

لدينا: $\mathrm{n} = 8, \overline{X} = ?\ ;\ \mathrm{S} = ?\ ;\ 1\text{-}\alpha = 0.90.\quad \mathrm{X} \sim \mathrm{N}\ (\ ?,\ ?\ )$

لدينا حجم العينة $\mathrm{n} = 8$ ، أما وسطها فيحسب من العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$.

$$\overline{X} = (100 + 102 + 98 + 96 + 103 + 104 + 97 + 92)/8 = 792/8 = 99\ \mathrm{m}.$$

ومنه يتم تقدير معدل الفترة المستغرقة خلال الرحلة الواحدة للحافلة بـ 99دقيقة، أي أن $\mu=99$.

2 - تقدير

الانحراف المعياري للفترات المستغرقة خلال الرحلة الواحدة.

عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع فإنه يتم استخدام العلاقة:

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(100-99)^2 + (102-99)^2 + (98-99)^2 + (96-99)^2 + (103-99)^2 + (104-99)^2 + (97-99)^2 + (92-99)^2}{8-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{114}{7}} = 4.035 \text{ m}$$

3 - **تقدير فترة الثقة:**

1 - مستوى الثقة هو 90%.

2 - 1-

$$\alpha = 0.90 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Longrightarrow 1 - 0.05 = 0.995$$

ومنه معامل الثقة هو: $t_{1-\frac{0.05}{2};\,8-1} = 3.499$.

3 - فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu} {}^{S}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu} {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[99 - 3.499X \; {}^{4.035}/_{\sqrt{8}} \; ; 99 + 3.499X \; {}^{4.035}/_{\sqrt{8}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[94.01 \; ; 103.99]$.

التمرين الخامس:

في عينة عشوائية حجمها 144 عاملا من مصنع به 3600 عاملا، وجد أن 94 عاملا يفضلون التقاعد المسبق .

أ - أوجد فترة ثقة 95 % لنسبة العاملين الذين يفضلون التقاعد المسبق.

ب - إذا كنا نرغب في الحصول على نصف طول فترة الثقة السابقة فما هو حجم العينة المناسب لنفس المعطيات.

حل التمرين الخامس:

الحل:

- **أ-** إيجاد فترة الثقة:

- تقدير نسبة العمال الذين يفضلون التقاعد المسبق:

$$p' = \frac{94}{144} = 0.65 = 65\%$$

بما أن حجم العينة أكبر من 30 و ($n.p = 144x\ 0.65 = 93.6 > 5$; $n.q > 5$) فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي وإيجاد فترة الثقة كما يلي:

1 - مستوى الثقة هو 95%.

2 - 1-

$$\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 0.5 - 0.05 = 0.4500$$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

3 - فترة الثقة هي:

وحيث أن $\frac{n}{N} = \frac{144}{3600} = 0.04 < 0.05$ فإنه يتم إهمال معامل الإرجاع في حساب قيمة الانحراف المعياري.

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}\ ; p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[0.65 - 1.96\sqrt{\frac{0.65(1-0.65)}{144}}\ ; 0.65 + 1.96\sqrt{\frac{0.65(1-0.65)}{144}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[0.5720\ ; 0.7279]$.

ب- إيجاد -

حجم العينة المناسب

طول فترة الثقة السابقة هو: $\Delta = 0.7279 - 0.5720 = 0.1559$

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{0.1559}{2} = 0.07795 \Longrightarrow$$

نصف طول الفترة الجديدة هو إذن: $d = \frac{0.07795}{2} = 0.038975$

بما أن النسبة P معلومة فإن حجم العينة يحسب كما يلي:

$$n \geq \frac{Z^2_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{d^2}p'(1-p') \Longrightarrow n \geq \frac{1.96^2}{0.038975^2}0.65(1-0.65)$$

$$\Longrightarrow n \geq 574.97$$

$$\Longrightarrow n = 575$$

التمرين السادس:

تريد إدارة مصنع لافارج التحكم في جودة الإنتاج من خلال ضبط أوزان أكياس الإسمنت ودراسة التغيرات التي قد تطرأ على أوزان الأكياس المختلفة، فقامت بأخذ عينة من الأكياس حجمها 100 كيسا، حيث وجدت أن الانحراف المعياري لها هو 0.7 كغ .

المطلوب : إيجاد فترة ثقة 90 % للانحراف المعياري لأوزان أكياس الإسمنت بالمصنع.

حل التمرين السادس:

n= 100. S= 0.7.1-$\alpha = 0.90$

1 - مستوى الثقة هو 90%.

2 - 1-

$$\alpha = 0.90 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0.05 \\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \end{cases}$$

ومنه قيمتيكاي تربيع عند درجة حرية $(10 - 1)$ هما:

$$\begin{cases} x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.95\,;100} = 124.342 \\ x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.05\,;100} = 77.929 \end{cases}$$

3 - فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[\frac{(100-1)0.7^2}{124.342} \leq \sigma^2 \leq \frac{(100-1)0.7^2}{77.929}\right]$$

أي أن: تباين المجتمع محصور بين: $[0.39\ ,\ 0.62]$.

ومنه فترة ثقة 90% للانحراف المعياري للمجتمع هي: $[0.62\ ,\ 0.79]$.