الفصل الرابع: اختبارالفرضيات

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

1. ما هو المبدأ العام لاختبار الفروض؟
2. ماذا يقصد بالخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني؟
3. ماذا يقصد بقوة الاختبار؟

حل التمرين الأول:

1. يشير اختبار الفروض إلى قبول أو رفض ما عن خاصية غير معلومة للمجتمع أو شكل توزيع المجتمع، حيث يتم وضع فرض ما عن تلك الخاصية غير المعلومة من المجتمع، ثم تؤخذ عينة عشوائية من المجتمع، وعلى أساس خاصية العينة المناظرة، نقبل أو نرفض الفرض عند مستوى ثقة معينة.
2. الخطأ من النوع الأول: هو الخطأ الذي يحدث عند رفض فرضية العدم عندما تكون صحيحة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الأول يرمز له بالرمز α.

أما الخطأ من النوع الثاني:هو الخطأ الذي يحدث عند قبول (عدم رفض) فرضية العدم عندما تكون خاطئة، والاحتمال الذي يحدث نتيجة الخطأ الثاني يرمز له بالرمز β.

وباختصار الخطأ من النوع الأول هو رفض فرض صحيح، والخطأ من النوع الثاني هو قبول فرض خاطئ.

3. قوة الاختبار إذن تقاس بمدى قدرته على رفض الفرضية الصفرية لما تكون هذه الأخيرة خاطئة، أي:

$$Power = 1 - \beta = \mathrm{P}\left(\mathrm{H}_0 \text{ رفض } / \text{ خاطئة } \mathrm{H}_0\right)$$

التمرين الثاني:

شركة مصغرة مختصة في صناعة الأثاث المنزلي، يريد صاحبها التزود بأعمدة خشبية سمكها 4 سم، حيث تبين له من خلال خبرته السابقة أن الأقل سمكا غير ملائمة والأكثر سمكا أكثر تكلفة،

فقام بأخذ عينة عشوائية من 36 عمودا من مورد فوجد أن متوسط سمكها هو 3.8 سم بانحراف معياري 0.2.

-بم تنصح صاحب الشركة إذا كان يرغب في اتخاذ القرار بشأن شراء الأعمدة من هذا المورد عند مستوى معنوية 5 %.

حل التمرين الثاني:

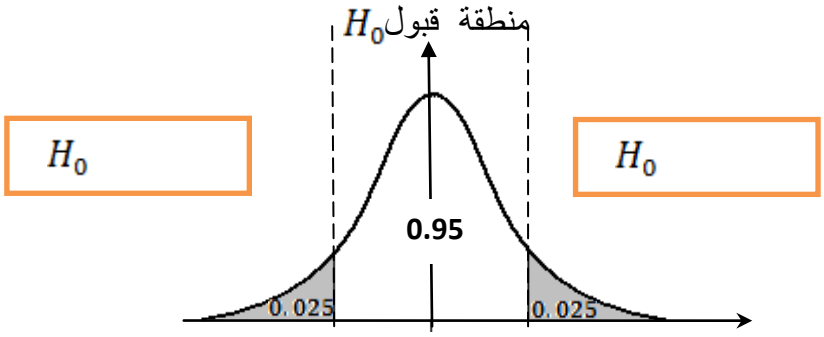
-الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات

بما أن صاحب الشركة لا يريد أن يكون سمكك الأعمدة مساو لـ 4 سم ولا يختلف عنها بالزيادة أو النقصان، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 4 \quad \longleftrightarrow \quad ; H_1: \mu \neq 4$$

-الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبارثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي:



-الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبارثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{رفضعدم} \\ Z_C < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} & \Rightarrow H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

-الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

$$\Rightarrow Z_{0.5-\alpha/2} = 1.96$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$Z_C = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{3.8 - 4}{0.2/\sqrt{36}} = -6.06$$

-الخطوة الخامسة:المقارنة واتخاذ القرار

نلاحظ أن : $-6.06 < -1.96$ أي أن : $Z_C < -Z_{0.5-\alpha/2}$

وه ذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة، أي النتائج تؤكد عدم الشراء من عند هذا المورد.

التمرين الثالث:

إذا كان أحد مصانع الأغذية ينتج نوعا معينا من الألبان حيث متوسط وزن العبوة هو 0.5 كغ وذلك بانحراف معياري 36 غ، حيث أن أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي، ولمراقبة التزام المصنع بمعايير الجودة تم اختيار عينة من 25 عبوة فوجد أن متوسط الأوزان يساوي 0.48 كغ .

- هل ترى أن هناك عيبا في الإنتاج أدى إلى انخفاض متوسط الأوزان للعبوات عند مستوى معنوية 1%.

حل التمرين الثالث:

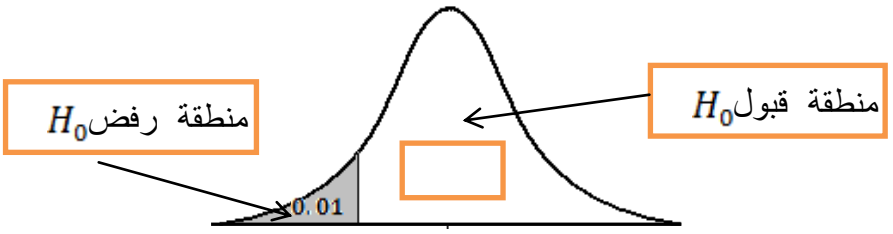
-الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات

الانخفاض في معدل أوزان العبوات يقودنا لاستعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أصغر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 0.5 \quad \longleftrightarrow \quad ; H_1: \mu < 0.5$$

-الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

مستوى الدلالة هو 0.01، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليسار كما هو موضح في الشكل الموالي:



-الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار

المجتمع طبيعي التوزيع وحجم العينة صغير (أقل من 30) وتباين المجتمع مجهول وبالتالي فإن المتغيرة تتبع توزيع ستيودنت وستحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة t، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} t_c \geq -t_{0.99,25-1} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض عدم} \\ t_c < -t_{0.99,25-1} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

-الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار t

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow\Rightarrow 1 - 0.01 = 0.99$$

$$\Rightarrow -t_{0.99,25-1} = -2.485$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$t_C = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{0.48 - 0.5}{0.036/\sqrt{25}} = -2.77$$

-الخطوة الخامسة:المقارنة واتخاذ القرار

نلاحظ أن : $-2.77 < -2.485$ أي أن : $t_C < -t_{0.99,25-1}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة على أساس وجود عيب في الإنتاج أدى إلى انخفاض متوسط الأوزان للعبوات عند مستوى معنوية 1%.

التمرين الرابع:

بلغت نسبة الطلبة المسجلين بالمركز المكثف للغات بإحدى جامعات الجزائر 0.2، وفي محاولة من إدارة المعهد لرفع هذه النسبة شرعت في توعية الطلاب بمختلف الوسائل الترويجية للمعهد ومهامه، ثم قامتبأخذ عينة عشوائية من 1000 طالب فوجدت بأن عدد المسجلين بالمعهد هو 220 طالبا.

-ما هو تقييمك لمحاولة إدارة المعهد عند مستوى معنوية 0.05.

حل التمرين الرابع:

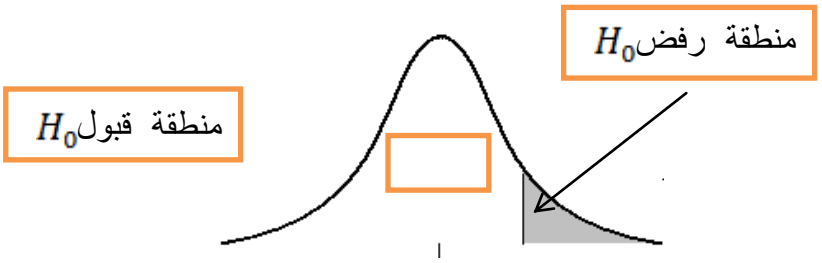
-الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات

بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو رفع نسبة الطلبة المسجلين بالمعهد ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: P \leq 0.20 H_1: P > 0.20$$

-الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:



0. 05

-الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow H_0 \text{ رفضعدم} \\ Z_C > +Z_{0.5-\alpha} & \Rightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

-الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \Longrightarrow 0.5 - 0.05 = 0.4500$$

$$\Longrightarrow Z_{0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{220}{1000} = 0.22$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.22 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{1000}}} = 1.58$$

-الخطوة الخامسة:المقارنة واتخاذ القرار

نلاحظ أن : $1.58 < 1.645$ أي أن : $Z_C < +Z_{0.5-\alpha}$

وه ذا يعني عدم رفض الفرضية الصفرية H_0 ورفض الفرضية البديلة أي أن محاولة إدارة المعهد لرفع نسبة الطلبة المسجلين لم تحقق الهدف المرجو من خلال توعيتهم بمختلف الوسائل الترويجية للمعهد ومهامه.

التمرين الخامس:

تم أخذ أربع قراءات بجهاز معين فكانت قيمها كما يلي: 59، 55، 51، 51

اختبر الفرضية الصفرية: $H_0: \sigma = 0.7$ مقابل الفرضية البديلة: $H_1: \sigma \neq 0.7$ عند مستوى دلالة 0.10.

حل التمرين الخامس:

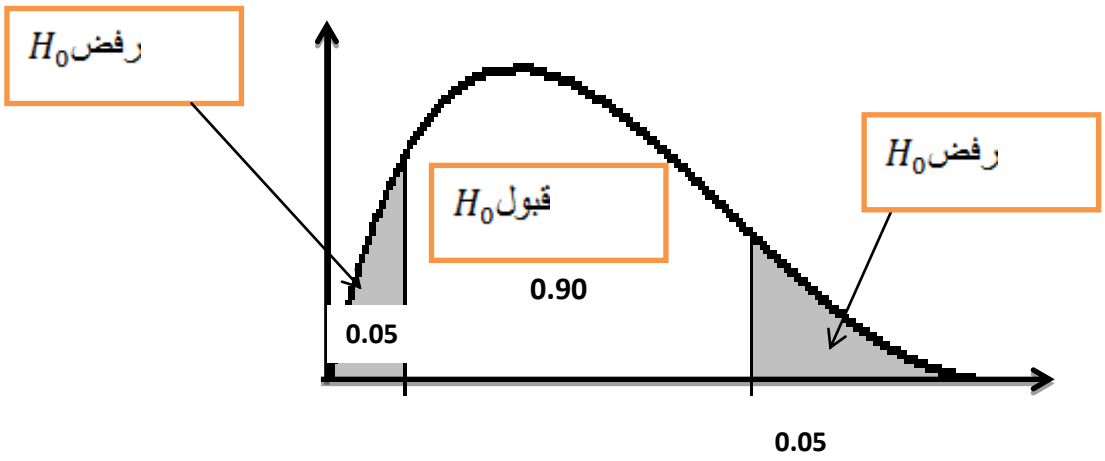
-الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات

الفرضية البديلة ذات اتجاهين وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \sigma = 0.7 \quad H_1: \sigma \neq 0.7$$

-الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

مستوى الدلالة هو 0.10، وبما أن الاختبارثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي



-الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار

سيتم قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار ثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} {x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \leq X^2 \leq {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \Rightarrow \text{رفض عدم } H_0 \\ X^2 < {x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \vee X^2 > {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \Rightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$$

-الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار

أولا: القيمة الجدولية

$n = 4 \Longrightarrow \nu = 4 - 1 = 3$

فدرجة الحرية إذن هي 3، أما قيمتيكاي تربيع المناظرة للحدود الحرجة من الجدول هي:

$$x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.05;3} = 0.352$$

$$x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.95;3} = 7.815$$

ثانيا: القيمة الفعلية

أ - نحسب تباين العينة أولا:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{59+55+51+51}{4} = 54$$

$$\hat{S} = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{(59-54)^2+(55-54)^2+(51-54)^2+(51-54)^2}{4-1}$$

$$= \frac{44}{3} = 14.67$$

$$x^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = (4-1)\frac{3.83^2}{0.7^2} = 62.87$$

الخطوة الخامسة:المقارنة واتخاذ القرار

نلاحظ أن : $62.87 > 7.815$ أي أن : $X^2 > x^2_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة عند مستوى معنوية 10 %.