Deuxième partie
Probabilités

3 Combinatoire

Avant de commencer l'étude des probabilités, il est nécessaire d'apprendre à compter le nombre d'éléments des ensembles finis qui seront les événements étudiés : c'est le **dénombrement**.

Et un moyen pour y arriver est l'utilisation de quelques méthodes combinatoires, que nous détaillons ici.

3.1 cardinal

Si E est un ensemble fini, on appelle **cardinal** de E, et on note $\text{card}(E)$, le nombre de ses éléments.

exemple :

- Si $E = \{$ pique, trèfle, coeur, carreau $\}$, son cardinal est $\text{card}(E) = 4$.
- Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\text{card}(E) = 6$.
- Si E est l'ensemble des entiers, $\text{card}(E)$ est infini.
- Si E est l'ensemble des manières de placer Amandine, Bertrand et Cécile sur un banc, quel est le cardinal de E ?
  On peut énumérer les possibités, en indiquant l'ordre de droite à gauche : A, B, C, ou bien A, C, B, ou bien B, A, C ou bien B, C, A, ou bien C, A, B, ou bien C, B, A.
  Et donc $\text{card}(E) = 6$.

3.2 factorielle

Le dernier exemple est encore traitable directement ; mais si le nombre de personnes à classer augmente, on a intérêt à réflechir un peu plus...par exemple, de combien de manières peut-on classer 80 étudiants de DUT Mesures Physiques ?

Il suffit de choisir, parmi les 80 étudiants, celui qui sera premier : on a 80 possibilités. Puis de choisir le second parmi les 79 restants : 79 possibilités. Puis le troisième, le quatrième, et ainsi de suite. On a donc $80 \times 79 \times 78 \times \ldots \times 2 \times 1$ possibilités.

Cette démonstration se généralise, et

> le nombre de façons de classer n élements est $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Le nombre $n!$ se lit « **factorielle** n ».

Autrement dit, $n!$ est le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

3.3 listes

Un autre problème classique de dénombrement est celui du tirage avec remise : typiquement, on dispose d'une urne avec 10 jetons, numérotés de 1 à 10, et on tire 3 fois de suite un jeton dont on note le numéro avant de le remettre dans l'urne. On a donc $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ triplets de résultats possibles. Plus généralement, on démontre de même que

> le nombre de manières de fabriquer une liste (ordonnée) de n-éléments tous compris entre 1 et p est p^n.

3.4 arrangements

Combien de podiums sont possibles pour une épreuve olympique avec 10 participants ? Il faut choisir la médaille d'or parmi les 10, puis la médaille d'argent parmi les 9 restants, puis la médaille de bronze parmi les 8 restants, soit $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Plus généralement,

> le nombre de manières de classer p personnes choisies parmi n est
> $$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

3.5 combinaisons

A un concours de recrutement, 10 candidats se présentent pour trois postes. Combien de possibilités de recrutement ?

Ici, contrairement à l'exemple précédent, l'ordre importe peu : seul compte le fait d'être, ou non, recruté. On peut donc commencer par compter le nombre de manière de classer trois candidats parmi 10 : 720. Puis, ensuite, diviser ce nombre par le nombre de classements de ces trois recrutés entre eux, soit 3!. Et le nombre de recrutements possibles est donc de 120.

Plus généralement,

> le nombre de manières de choisir p éléments parmi n est
> $$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

$\binom{n}{p}$ se prononce « p parmi n ». Les $\binom{n}{p}$ sont les coefficients binômiaux ; l'écriture largement utilisée dans le secondaire en France au siècle précédent est C_n^p (lire « C n p ») (attention à l'ordre : n est en haut dans $\binom{n}{p}$, en bas dans C_n^p)

On peut aussi voir $\binom{n}{p}$ comme le nombre de parties à p-éléments dans un ensemble à n éléments. Avec cette définition, il est alors clair que

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

car déterminer un ensemble à p-éléments revient exactement à déterminer son complémentaire, à $n-p$ éléments.

On a aussi :

$$\boxed{\text{pour } n, p \text{ supérieurs ou égaux à 1,} \qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.}$$

En effet, si E est un ensemble à n éléménts et $a \in E$ fixé, il y a $\binom{n-1}{p}$ parties de E à p éléments qui ne contiennent pas a, et $\binom{n-1}{p-1}$ qui contiennent a. Cette propriété est à la base de la construction du triangle de Pascal : le tableau suivant, où chaque nombre à partir de la ligne 1 est la somme des deux de la ligne du dessus sur la même colonne et la colonne de gauche,

	col.0	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5	col.6	col.7	col.8	col.9	...
ligne 0 :	1										
ligne 1 :	1	1									
ligne 2 :	1	2	1								
ligne 3 :	1	3	3	1							
ligne 4 :	1	4	6	4	1						
ligne 5 :	1	5	10	10	5	1					
ligne 6 :	1	6	15	20	15	6	1				
ligne 7 :	1	7	21	35	35	21	7	1			
ligne 8 :	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
ligne 9 :	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
...			...								

contient, à l'intersection de la ligne n et de la colonne p la valeur de $\binom{n}{p}$.

C'est l'occasion de rappeler l'utilisation des $\binom{n}{p}$ pour le développement d'expressions algébriques :

pour tous a,b complexes,

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n}$$

et en particulier : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Citons enfin une dernière propriété des $\binom{n}{k}$ qui nous sera utile plus tard dans l'étude de la loi binomiale : si $n, k \geq 1$, on a $\dfrac{kn!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!}$, donc

$$\boxed{\text{pour } k, n \text{ entiers tels que } 0 \leq k \leq n,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$$