

## 7 Quelques lois de probabilités classiques

### 7.1 probabilités discrètes

#### 7.1.1 la loi de Bernoulli ou loi 0-1

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues (« succès - échec »), de probabilités  $p$  et  $q = 1 - p$ . Par exemple, le jeu de pile ou face est une épreuve de Bernoulli avec  $p = q = 1/2$ .

On définit alors la variable aléatoire  $X$  qui vaut 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès.

La loi de probabilité de la variable  $X$  est appelée **loi de Bernoulli de paramètre  $p$** . On parle aussi de **loi 0-1**.

Son espérance vaut  $E(X) = q \times 0 + p \times 1 = p$ , et sa variance  $\text{Var}(X) = p(1 - p)^2 + q(0 - p)^2 = pq^2 + qp^2 = pq(p + q) = pq$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\text{si } X \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p, \\ & p(X = 0) = q, \quad p(X = 1) = p, \\ & \text{et } E(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}. \end{aligned}$$

#### 7.1.2 la loi binomiale

Un schéma de Bernoulli consiste en la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On définit alors la variable aléatoire « nombre total de succès »  $X$ , à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

La loi de probabilité de  $X$  est appelée **loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** .

Décrivons plus précisément  $X$  :  $X$  est caractérisée par le fait que pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n$ ,  $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

On peut alors calculer l'espérance de la loi binomiale :

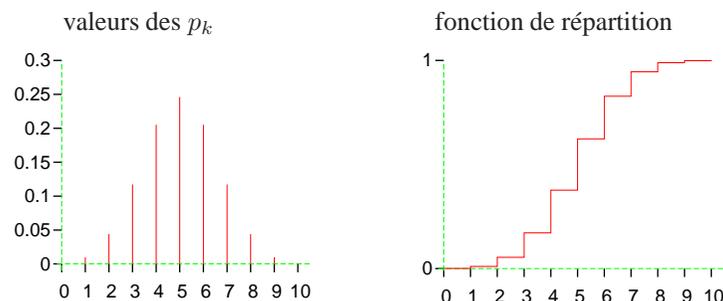
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p p^k q^{n-1-k} \\ E(X) &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = np(p + q)^{n-1} \\ &= np. \end{aligned}$$

et de même on peut montrer que la variance vaut  $\text{Var}(X) = npq$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\text{si } X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n, p, \\ & \text{pour tout } k \in \{0; 1; \dots, n\}, \quad p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \\ & \text{et } E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}. \end{aligned}$$

On a déjà vu les représentations graphiques des  $p_k$  et de la fonction de répartition pour  $n = 10, p = 1/2$  :



**exemple :** Un candidat a 5% de chances d'être admis à un concours. Quelle est l'espérance du nombre de candidats admis dans une des salles d'examen de 40 places ?

Le nombre de candidats admis dans la salle suit une loi binomiale de paramètres  $n = 40$  et  $p = 0,05$ . L'espérance est  $E = 2$ , il y aura donc « en moyenne » deux admis dans chaque salle de 40 candidats.

La variance  $V = 2 \times 0,95 = 1,90$  et l'écart-type  $\sigma \simeq 1,38$  mesurent la dispersion des valeurs autour de cette valeur moyenne quand on regarde le nombre d'admis sur un grand nombre de salles d'examen. Ce point sera développé en statistiques plus loin.

#### 7.1.3 la loi de Poisson

Il s'agit d'une loi qui permet de modéliser des événements rares, comme un phénomène de désintégration radioactive. On admet que la décomposition d'un échantillon radioactif vérifie les propriétés suivantes :

1. le nombre moyen de désintégrations durant l'intervalle  $\Delta t$  est  $\Lambda \Delta t$ , avec  $\Lambda$  ne dépendant ni de  $t$ , ni de  $\Delta t$ .
2. deux désintégrations ne se produisent jamais simultanément
3. les désintégrations successives sont indépendantes

L'hypothèse 1 est réaliste tant que l'échantillon étudié comporte un grand nombre d'atomes susceptibles de se désintégrer, de sorte que les premières désintégrations n'influent pas sur le nombre d'atomes restant à désintégrer. L'hypothèse 2 est réaliste tant que l'activité radioactive n'est pas trop intense : on peut supposer que toutes les désintégrations sont espacées dans le temps. L'hypothèse 3 est physiquement vérifiée.

On peut alors vérifier que la probabilité  $\alpha$  qu'un atome se désintègre durant un intervalle de temps infiniment petit  $[t, t + dt]$  est  $\Lambda dt$ . En effet, durant cet intervalle de temps, le nombre moyen d'atomes désintégrés est, par l'hypothèse 1,  $\Lambda dt$ . Et comme les désintégrations ne sont pas simultanées (hypothèse 2), sur un intervalle de temps infinitésimal, on a soit 1 désintégration (avec probabilité  $\alpha$ ) soit 0 désintégration (avec probabilité  $1 - \alpha$ ). Ainsi on a bien  $\Lambda dt = 1 \times \alpha + 0 \times (1 - \alpha) = \alpha$ , égalité que nous allons réutiliser.

On souhaite maintenant déterminer la probabilité  $p_k(t)$  qu'exactly  $k$  atomes se soient désintégrés pendant un intervalle de temps  $[0, t]$ .

L'événement « aucun atome ne s'est décomposé pendant l'intervalle  $[0, t + dt]$  » est l'intersection des deux événements indépendants « aucun atome ne s'est décomposé durant  $[0, t]$  » (de probabilité  $p_0(t)$ ) et « aucun atome ne s'est décomposé durant  $[t, t + dt]$  » (de probabilité  $1 - \Lambda dt$ ).  
Ainsi,  $p_0(t + dt) = p_0(t)(1 - \Lambda dt)$ .

L'événement « exactement  $k$  atomes se sont décomposés durant l'intervalle  $[0, t + dt]$  » est la réunion des deux événements incompatibles « exactement  $k$  atomes se sont décomposés durant l'intervalle  $[0, t]$  et aucun durant  $[t, t + dt]$  » (de probabilité  $p_k(t)(1 - \Lambda dt)$ ) et « exactement  $k - 1$  atomes se sont décomposés durant l'intervalle  $[0, t]$  et un durant  $[t, t + dt]$  » (de probabilité  $p_{k-1}(t)\Lambda dt$ ).  
Ainsi,  $p_k(t + dt) = p_k(t)(1 - \Lambda dt) + p_{k-1}(t)\Lambda dt$ .

La première relation donne l'équation différentielle  $p'_0(t) = -\Lambda p_0(t)$ , donc  $p_0(t) = e^{-\Lambda t}$  (car à l'évidence  $p_0(0) = 1$ ).

La deuxième donne les équations  $p'_k(t) = -\Lambda p_k(t) + \Lambda p_{k-1}(t)$ .  $p_k(t)$  est donc de la forme  $K_k(t)e^{-\Lambda t}$ , avec  $K'_k(t) = \Lambda e^{\Lambda t} p_{k-1}(t)$ .

Comme  $p_0(t) = e^{-\Lambda t}$ ,  $K_1(t) = \Lambda$ , donc  $K_1(t) = \Lambda t$ , et  $p_1(t) = \Lambda t e^{-\Lambda t}$ . On montre ensuite par récurrence que  $K_k(t) = \frac{\Lambda^k t^k}{k!}$ , et donc que  $p_k(t) = \frac{\Lambda^k t^k}{k!} e^{-\Lambda t}$ .

On peut vérifier que l'on a bien  $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t) = 1$ , quelles que soient les valeurs de  $t$  et  $\Lambda$ .

Plus généralement : une variable aléatoire suit une **loi de Poisson de paramètre**  $\lambda > 0$  si pour  $k \geq 0$ ,  $p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ .

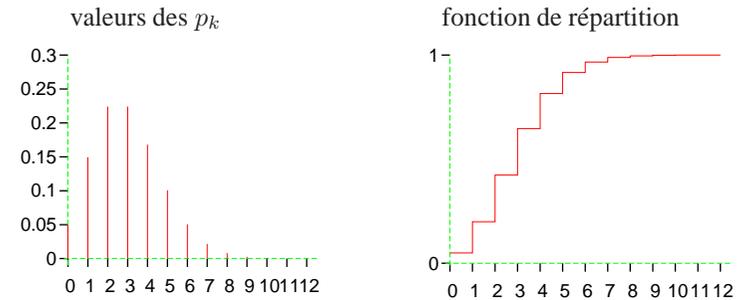
Ainsi, à chaque fois que l'on cherchera à modéliser des événements rares, dont le nombre moyen par unité de temps est  $\lambda$  connu et qui se succèdent de manière indépendante sans que deux événements ne soient jamais simultanés, le nombre  $X$  d'événements qui ont lieu durant l'unité de temps fixée suivra une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Alors :

$$\text{si } X \text{ suit une loi de Poisson paramètre } \lambda, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\text{et on a :} \quad E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

On a déjà vu pour  $\lambda = 3$  la représentation des  $p_k$  et de la fonction de répartition :



**exemples :** un standard téléphonique reçoit en moyenne 10 appels par heure.

On peut (et on doit, pour répondre aux questions) supposer que les appels sont indépendants les uns des autres, ne sont jamais simultanés, et que le nombre moyen d'appels sur une durée  $\Delta t$  est proportionnel à  $\Delta t$  : ici, 10 par heure, donc aussi  $10 \times 5/60$  par période de 5 minutes,  $10/4$  par période de 15 minutes, etc. . .

- quelle est la probabilité pour qu'en une heure il reçoive exactement 2 appels ?  
Le nombre  $X$  d'appels sur une période d'une heure suit une loi de Poisson de paramètre 10, et donc  $p(X = 2) = \frac{e^{-10} 10^2}{2!} \simeq 0, 23\%$ .
- quelle est la probabilité pour qu'en 5 minutes il reçoive exactement 3 appels ?  
Le nombre  $X$  d'appels suit une loi de Poisson de paramètre  $\frac{10 \times 5}{60} = \frac{5}{6}$ , et donc  $p(X = 3) = \frac{e^{-5/6} (\frac{5}{6})^3}{3!} \simeq 4, 2\%$ .
- quelle est la probabilité pour qu'en 15 minutes, il reçoive au moins 2 appels ?  
Le nombre  $X$  d'appels suit une loi de Poisson de paramètre  $\frac{10 \times 15}{60} = \frac{5}{2}$ , donc  $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - e^{-5/2} - e^{-5/2} (\frac{5}{2}) \simeq 71, 3\%$ .
- quelle est la probabilité pour qu'en une heure, il reçoive au plus 8 appels ?  
Le nombre  $X$  d'appels suit une loi de Poisson de paramètre 10, donc  $p(X \leq 8) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$ .

On peut bien entendu faire les calculs à l'aide des formules utilisées ci-dessus. Mais il est plus rapide et aussi plus précis d'utiliser les tables de valeur de la loi. Ici, on obtient sans aucun calcul à l'aide de la table située en fin d'ouvrage la valeur  $p(X \leq 8) \simeq 33,28\%$ .

**remarque :** si deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  **indépendantes** suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , alors  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

## 7.2 probabilités continues

### 7.2.1 la probabilité uniforme

Si une variable aléatoire à valeur dans un segment  $[a; b]$  a pour densité la fonction constante définie par  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  sur  $[a, b]$ , 0 ailleurs, on dit qu'elle suit une loi de probabilité uniforme.

$$\text{Alors } E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{De même } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - E(X)^2 = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ainsi,

$$\text{si } X \text{ suit une loi uniforme sur } [a; b], \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases},$$

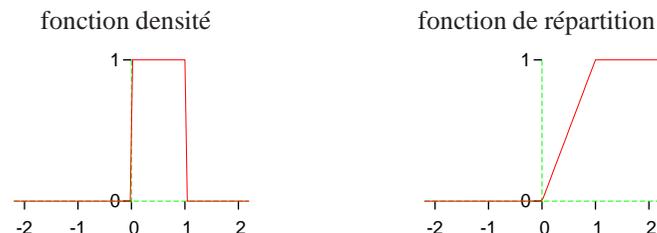
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases},$$

et on a :

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

D'où la représentation de la **loi uniforme sur  $[0, 1]$**  :



**remarque :** il n'existe pas de loi uniforme sur tout  $\mathbb{R}$  : si la densité est une constante  $c$ , on devrait avoir  $\int_{\mathbb{R}} c = 1$  : mais l'intégrale n'est pas définie si  $c \neq 0$ , et vaut 0 si  $c = 0$ .

### 7.2.2 la loi exponentielle

Soit  $X$  la durée de vie d'un composant « sans vieillissement », dont la durée de vie est indépendante du fonctionnement passé. Plus précisément, on veut que pour tous  $T, t \geq 0$  :

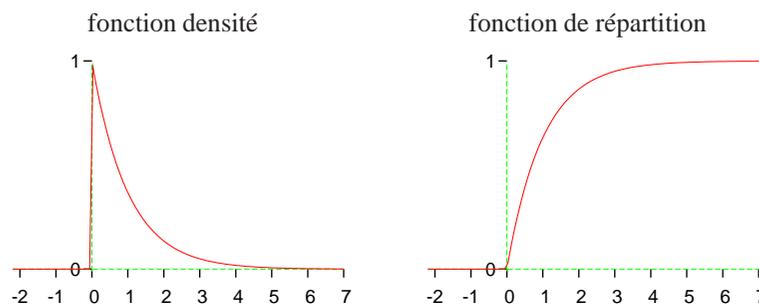
$$p(X \geq t+T \mid X \geq T) = p(X \geq t).$$

$$\text{Alors } \frac{1 - F_X(T+t)}{1 - F_X(T)} = 1 - F_X(t), \text{ donc si } G_X = 1 - F_X, \text{ pour tous } T, t \geq 0,$$

$$G_X(T+t) = G_X(T)G_X(t).$$

Cette équation fonctionnelle implique que  $G_X$  est une exponentielle de la forme  $G_X(t) = e^{-kt}$ , et donc pour  $t \geq 0$ ,  $F_X(t) = 1 - e^{-kt}$  (et  $F_X(t) = 0$  si  $t < 0$ ). La densité de la variable aléatoire  $X$  est alors la dérivée de  $F_X$ , soit  $f_X(t) = ke^{-kt}$  sur  $[0, +\infty[$ , 0 sur  $] -\infty, 0]$ .

On dit que  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre  $k$** , et on peut tracer l'allure du graphe de la fonction densité et de la fonction de répartition :



Résumons les valeurs à connaître pour une loi exponentielle :