Série de TD N° 3

Solution de l'exercice N° 3

Calcul de l'énergie de déformation d'une poutre à section constante posée sur 2 appuis et sollicitée en flexion par une charge P localisée en C.

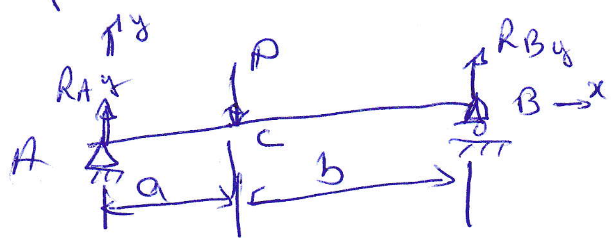


fig 3.

calcul des actions aux appuis
D'après les 2 équations de l'équilibre statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R_{Ay}} + \vec{R_{By}} - \vec{P} = 0$$

$$\Leftrightarrow R_{Ay} + R_{By} = P$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Leftrightarrow -Pa + R_{By} l = 0$$

$$\Rightarrow R_{By} = \frac{Pa}{l} \quad \text{et} \quad R_{Ay} = \frac{Pb}{l}$$

$a \neq b$

Calcul de l'énergie de déformation W_{AB}

$$W_{AB} = W_{AC} + W_{CB}$$

Pour $0 < x < a$ (AC)

$$W_{AC} = \frac{1}{2EI} \int_0^a M_{f_{AC}}^2 \, dx$$

$$M_{f_{AC}} = \frac{Pbx}{l} \Rightarrow M_{f_{AC}}^2 = \frac{P^2 b^2 x^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow W_{AC} = \frac{1}{2EI} \int_0^a \frac{P^2 b^2 x^2}{l^2} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 b^2}{l^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$W_{AC} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 b^2 a^3}{l^2 \times 3} \right) = \frac{1}{6EI} \frac{P^2 b^2 a^3}{}$$

$a \leq x < l$ (CB)

$$W_{CB} = \frac{1}{2EI} \int_a^l M_{f_{CB}}^2 \, dx$$

$$M_{f_{CB}} = \frac{Pbx}{l} - P(x-a) = P\left(\frac{b}{l} - 1\right) + Pa$$

$$M_{f_{BC}}^{2} = \frac{P^2 a^2 x^2}{l^2} - \frac{2P^2 a^2 x}{l} + P^2 a^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2EI}\int_a^l \left(\frac{P^2 a^2 x^2}{l^2} - \frac{2P^2 a^2 x}{l} + P^2 a^2 \right) dx$$

$$W_{TOT} = W_{A\cancel{B}} + W_{CB}$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^a \frac{P^2 b^2 x^2}{l^2} + \frac{1}{2EI}\int_a^l \left(\frac{P^2 a^2 x^2}{l^2} - \frac{2P^2 a^2 x}{l} + P^2 a^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[\frac{P^2 b^2}{l^2}\frac{a^3}{3} + \frac{P^2 a^2 x (l^3 - a^3)}{3l^2} - \frac{P^2 a^2}{l}(l^2 - a^2) + P^2 a^2 x (l-a) \right]$$

on pose : $l - a = b$

$$l^3 - a^3 = (l-a)(l^2 + al + a^2)$$

$$l^2 - a^2 = (l+a)(l-a)$$

$$W_{TOT} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIl} \qquad y_c = \text{flèche en } C$$

$$W_{TOT} = \frac{1}{2} P y_c = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIl}$$

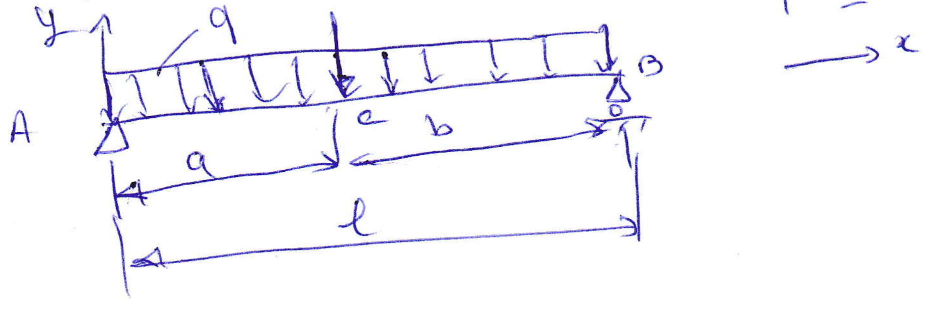
$$\Rightarrow y_c = \frac{P a^2 b^2}{3EIl}$$

Ex N° 4 !

calcul de l'énergie de déformation de la poutre sur la figure N° 4

q = charge répartie

P = " " localisée en C



Les réaction sur les appuis

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R_A = \dfrac{Pb}{l} + \dfrac{ql}{2} \\ R_B = \dfrac{Pa}{l} + \dfrac{pl}{2}\end{array}$$

Zone $0 \leq x \leq a$

$$M_f = R_A x - \frac{qx^2}{2} = M_1$$

$a \leq x \leq l$

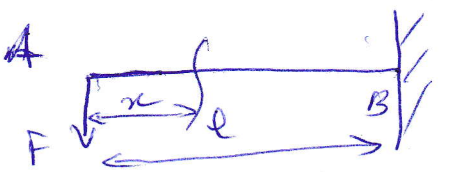
$$M_f = R_B x' - \frac{qx'^2}{2} = M_2$$

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^a M_1^2\,dx + \frac{1}{2EI}\int_a^l M_2^2\,dx$$

$$W = \frac{1}{6EI}\left[\frac{P^2a^2b^2}{l} + \frac{P^2l^5}{40} + \frac{Pab}{4}\left(l^2 + ab\right)\right]$$

<u>Ex N° 5 :</u>

calcul de la flèche au pt A de la fig 5.



$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M_f^2\,dx$$

$$M_f = -Fx$$

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l (-Fx)^2\,dx = \frac{1}{2EI}\left[\frac{F^2x^3}{3}\right]_0^l$$

$$W = \frac{F^2l^3}{6EI}$$

La flèche au pt A :

$$\frac{\partial W}{\partial F} = y_A \Longleftrightarrow \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{2Fl^3}{2EI \times 3} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$\boxed{y_A = \frac{Fl^3}{3EI}}$$

Ex N° 6

Une grue potence sur la figure 6
AB = ℓ et de moment quadratique I_1
BC = h = poteau de moment quadratique I_2
on doit déterminer la flèche en A : y_A sous l'action de P.

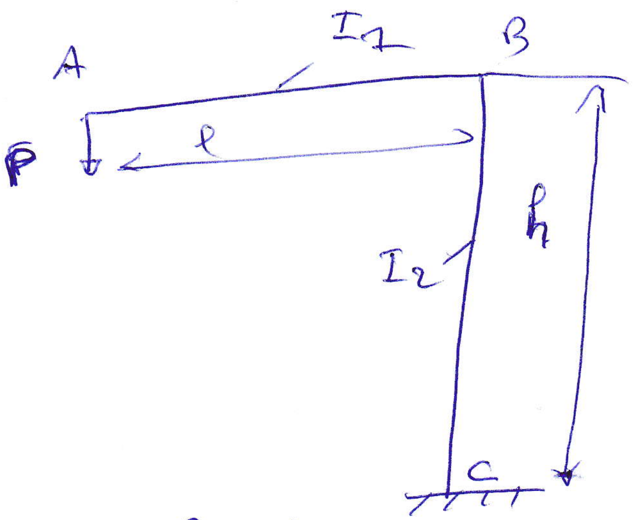


Fig. 6.

Dans la barre AB on a :

$M_f = -Px$

$$W_1 = \frac{1}{2EI_1}\int_0^\ell (-Px)^2 dx$$

$$W_1 = \frac{1}{2EI_1}\int_0^\ell P^2x^2 dx = \frac{P^2}{2EI_1}\frac{\ell^3}{3}$$

sur BC

$M_2 = -P\ell$ $\Rightarrow W_2 = \frac{1}{2EI_2}\int_0^h (-P\ell)^2 dx = \frac{1}{2EI_2}\int_0^h P^2\ell^2 dx$

$$= \frac{1}{2EI_2} P^2\ell^2 h$$

$$W_{TOT} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2E}\left[\frac{P^2\ell^3}{3I_1} + \frac{P^2\ell^2 h}{I_2}\right]$$

$$= \frac{P^2\ell^2}{2E}\left(\frac{\ell}{3I_1} + \frac{h}{I_2}\right)$$

flèche en A : y_A d'après le Théorème de Castigliano

$$\frac{\partial W}{\partial P} = y_A \iff \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{P\ell^2}{E}\left[\frac{\ell}{3I_1} + \frac{h}{I_2}\right]$$

$$\boxed{y_A = \frac{P\ell^2}{E}\left(\frac{\ell}{3I_1} + \frac{h}{I_2}\right)}$$