Master 1, Technique de Production industrielle, S1

Transfert de matière et de chaleur

Chap V

La Conduction thermique instationnaire

Chap V

La Conduction thermique instationnaire

1/ Généralités

Le profil de température sera une fonction des coordonnées et du temps.

Cas général $T = T(x, y, z, t)$

$t = 0$ état initial $\xrightarrow[\dot{q},\ T = f(x,y,z,t)]{\text{action des causes thermiques}}$ $t \longrightarrow \infty$ état stationnaire $T(t_\infty) = T_\infty(x, y, z)$

2) Equation générale

Le problème à résoudre est formulé par l'équation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$

Dans laquelle on supposera qu'il n'y a pas de source volumique de chaleur

$$\dot{q}_s = 0$$

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

equation differentielle instationnaire d'un ecoulement de chaleur unidimensionnel

où $a = \frac{k}{\rho c}$ est la diffusivité thermique

$$[a] = (m^2/s)$$

La diffusivité traduit l'aptitude du matériau à accommoder rapidement avec une situation thermique nouvelle.

3) Methode de resolution

On dispose de methodes analytiques et de methode numerique

Scanned by TapScanner

a) Methods analytique

- Solution auto-semblable
- principe de superposition
- separation de variables
- methode de Fourier

b) Methodes numérique

- methode des difference finies
- méthode des élements finis

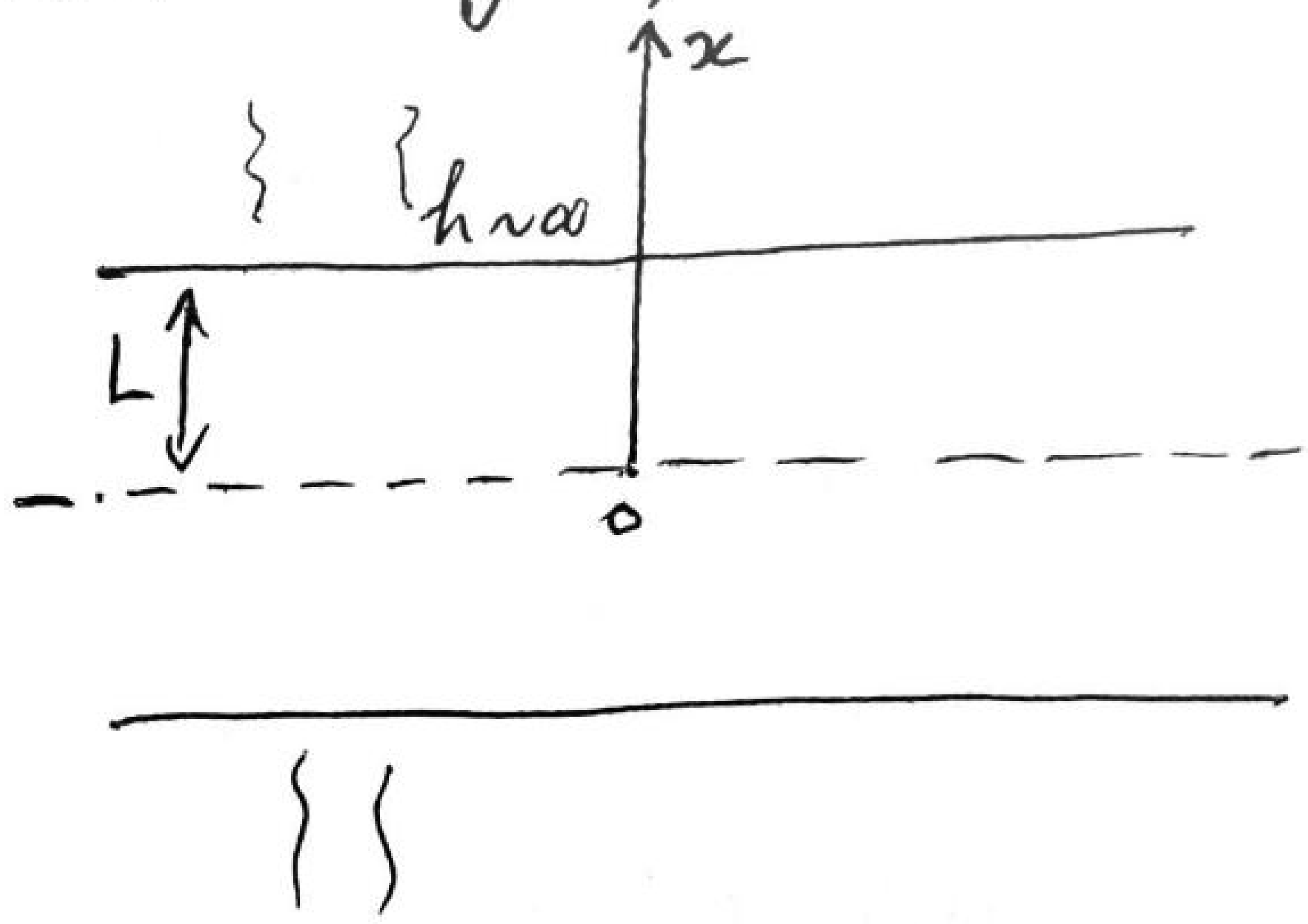
Exemple : methode des separation des variables

Exercice

Une plaque d'epaisseur 2L, de temperature uniforme T_0 est subitement plongée dans un bain de température constante T_∞, le coefficient h étant trés grand, determiner la la température instationnaire de la plaque.

Solution de l'exercice

La solution sera une fonction $T = f(x, t)$



$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Les conditions aux limites

03 conditions

$$\begin{cases} T(0, x) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ T(t, L) = T_\infty \end{cases}$$

On pose $\theta = T - T_\infty$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad ; \quad a = \frac{k}{\rho c}$$

Les conditions deviennent

$$\begin{cases} \theta(0, x) = \theta_0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \theta(t, L) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

On cherche θ sous la forme

$$\theta = X(x) \cdot \tau(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{a}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2$$

La resolution donne

$$\tau_n = B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\theta_n = X_n \cdot \tau_n$$

$$X_n = A_n \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{a}} x$$