Chapitre 3. Comportement élastique des composites

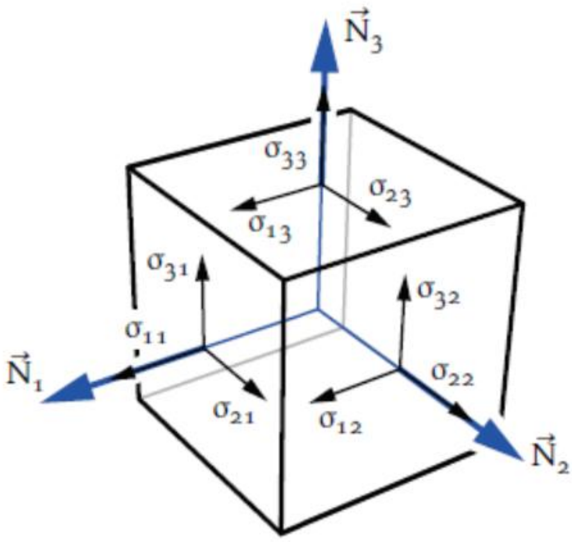
Matrice de souplesse et de rigidité

3.1. Notation matricielle et vectorielle

Le tenseur des contraintes et celui des déformations sont des tenseurs d'ordre deux symétriques.
Il faut donc six composantes pour représenter chacun des deux tenseurs dans une base.
Dans une base orthonormée **($\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$)** les contraintes et les déformations sont présentées comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Ces dernières peuvent être représentées schématiquement



La densité d'Energie est donnée

$$\mathrm{Tr}[\sigma\varepsilon] = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\left[\sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}\right]$$

Dans le cas des matériaux anisotropes, les contraintes et les déformations dans la base **($\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$)** sont rangées dans deux vecteurs notés σ et ε respectivement avec un unique indice :

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sqrt{2}\sigma_4 \\ \sqrt{2}\sigma_5 \\ \sqrt{2}\sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}; \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \sqrt{2}\varepsilon_4 \\ \sqrt{2}\varepsilon_5 \\ \sqrt{2}\varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Pour cette présentation la densité d'énergie s'écrit :

$$\mathrm{Tr}[\sigma\varepsilon] = \hat{\sigma}^T \hat{\varepsilon}$$

3.2. Changement de base

Dans cette partie, on définit les matrices de changement de base afin d'exprimer les contraintes ou les déformations dans un repère quelconque. Par la suite X est la représentation d'un tenseur d'ordre deux symétrique dans une base orthonormée directe, autrement dit :

$$\mathbf{X}_{(\vec{x}\vec{y}\vec{z})} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}_{(\vec{N}_1\vec{N}_2\vec{N}_3)}\mathbf{P}$$

Où P représente la matrice de passage de la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ vers la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

La matrice de passage inverse $\mathbf{P}^{-1}$ est définie dans le cas général comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= A_{11}\vec{x} + A_{21}\vec{y} + A_{31}\vec{z} \\ \vec{N}_2 &= A_{12}\vec{x} + A_{22}\vec{y} + A_{32}\vec{z} \\ \vec{N}_3 &= A_{13}\vec{x} + A_{23}\vec{y} + A_{33}\vec{z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Sous forme vectorielle, la relation (2.5) s'écrit $\hat{\mathbf{X}}_{(\vec{x}\vec{y}\vec{z})} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{X}}_{(\vec{N}_1\vec{N}_2\vec{N}_3)}$ où l'expression de $\hat{\mathbf{T}}^{-1}$ sera donnée ultérieurement. Les composantes de $\hat{\mathbf{X}}$ respectivement dans les bases $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont alors notées :

$$\begin{aligned} {}^T\hat{\mathbf{X}}_{(\vec{N}_1\vec{N}_2\vec{N}_3)} &= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{22} & X_{33} & \sqrt{2}X_{23} & \sqrt{2}X_{13} & \sqrt{2}X_{12} \end{bmatrix} \\ {}^T\hat{\mathbf{X}}_{(\vec{x}\vec{y}\vec{z})} &= \begin{bmatrix} X_{xx} & X_{yy} & X_{zz} & \sqrt{2}X_{yz} & \sqrt{2}X_{xz} & \sqrt{2}X_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.3. Rotation autour d'un axe

Prenons à titre d'exemple la rotation autour de l'axe X_3

On cherche à exprimer les contraintes et les déformations dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction des composantes dans la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ dans le cas d'une rotation d'un angle **θ** *autour* de l'axe. La matrice de passage inverse $\mathbf{P}^{-1}$ est telle que :

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $\theta = \vec{x}_1 \cdot \vec{N}_1$, $\cos\theta = C$ et $\sin\theta = S$. En utilisant la notation vectorielle, la relation (2.5) s'écrit sous la forme $\hat{X} = T^{-1}\hat{\hat{X}}$. De cette manière, les contraintes et les déformations sont exprimées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à partir de leurs composantes dans la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ à partir de la matrice T^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}SC \\ S^2 & C^2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}SC \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ \sqrt{2}SC & -\sqrt{2}SC & 0 & 0 & 0 & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}$$

On a exactement la même relation pour les déformations :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}SC \\ S^2 & C^2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}SC \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ \sqrt{2}SC & -\sqrt{2}SC & 0 & 0 & 0 & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

3.4. Loi de comportement élastique linéaire

3.4.1. Symétries des souplesses et rigidités

Un matériau possède un comportement élastique linéaire s'il existe une relation linéaire bi-univoque entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

où $\boldsymbol{C_{ijkl}}$ représente le tenseur des rigidités et $\boldsymbol{S_{ijkl}}$ le tenseur des souplesses, tenseurs d'ordre quatre et inverses l'un de l'autre. Le respect des symétries matérielles impose les symétries suivantes $\boldsymbol{C_{ijkl} = C_{jikl}}$ car ± est symétrique et $\boldsymbol{C_{ijkl} = C_{ijlk}}$ car est symétrique. Ces tenseurs sont donc définis par **36** composantes indépendantes.

Des considérations thermodynamiques indiquent qu'il existe une énergie de déformation élastique *w* exprimée en déformation ***w*(ε)** dont dérive la loi de comportement élastique linéaire :

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

La convexité de l'énergie de déformation *w*(ε) impose la relation $\boldsymbol{C_{ijkl} = C_{klij}}$. ***Le tenseur des modules C_{ijkl} est donc composé de 21 constantes élastiques indépendantes pour un matériau anisotrope***.
On adopte la notation matricielle à deux indices pour écrire les relations de comportement élastique linéaire sous forme matricielle. On pose la règle de conversion suivante :

$$\hat{C}_{IJ} \Leftrightarrow C_{ijkl}$$

$$(i,j) \rightarrow I = (1,1) \rightarrow 1,\ (2,2) \rightarrow 2,\ (3,3) \rightarrow 3$$
$$(2,3) \rightarrow 4,\ (1,3) \rightarrow 5,\ (1,2) \rightarrow 6$$

À titre d'exemple, les relations de comportement s'écrivent en notation vectorielle sous la forme suivante dans la base $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$, $\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{symétrie} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

La relation inverse s'écrit $\hat{\varepsilon} = \hat{S}\hat{\sigma}$ où $\hat{S} = \hat{C}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{symétrie} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}$$