

### 3.4. Matériaux monocliniques

Par définition, un matériau monoclinique possède un plan de symétrie matériel. Dans ce cas, la matrice de comportement doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. On montre dans cette partie que lorsque des symétries matérielles existent le nombre de composantes nécessaires à décrire le comportement élastique linéaire est inférieur à 21.

L'effet des symétries élastiques par rapport aux plans  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ,  $(\vec{n}_1, \vec{n}_3)$  et  $(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$  sur la relation de comportement élastique linéaire est étudiée dans la suite. Lorsque l'on tient compte d'une symétrie, la forme de la matrice  $C_{ij}$  de rigidité est identique à celle de la matrice des souplesses  $S_{ij}$ .

#### 3.4.1. Symétrie par rapport au plan $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$

Le matériau étudié présente un plan de symétrie  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ . Dans ce cas, la forme de la matrice de rigidité doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Appliquons la formule (3.20) avec :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.25)$$

La relation de comportement exprimée en rigidité est  $\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$ . En exprimant les relations de symétrie par rapport au plan  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ , on obtient, après calcul, les relations de comportement suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.26)$$

La forme de la matrice de souplesse est identique à celle des rigidités. Démonstration À titre d'exemple, la démonstration est faite sur la matrice de rigidité C. Une démonstration similaire peut être réalisée sur la matrice des souplesses S. Tous calculs faits, on obtient :

$$P^{-1}\sigma P = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)} \dots\dots\dots(3.27)$$

En utilisant la notion vectorielle :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon : P^{-1}(C\varepsilon)P &= C(P^{-1}\varepsilon P) \\ \Leftrightarrow P^{-1}(\sigma)P &= C(P^{-1}\varepsilon P) \\ \Rightarrow \hat{\sigma} &= \hat{C}\hat{\varepsilon} \end{aligned} \dots\dots\dots(3.28)$$

On obtient alors dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ -\sqrt{2}\sigma_{23} \\ -\sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ -\sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ -\sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \end{matrix} \dots\dots\dots(3.29)$$

En utilisant la relation (3.14) et par identification à la relation (3.29), on obtient alors six équations vraies pour toutes valeurs de déformation. À titre d'exemple les équations (a), (b) et (d) sont développées :

$$\begin{aligned} (a) \Rightarrow \forall \varepsilon : C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\sqrt{2}\varepsilon_{23} + C_{15}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{16}\sqrt{2}\varepsilon_{12} = \\ C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} - C_{14}\sqrt{2}\varepsilon_{23} - C_{15}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{16}\sqrt{2}\varepsilon_{12} \\ \Rightarrow \forall \varepsilon : 2C_{14}\sqrt{2}\varepsilon_{23} + 2C_{15}\sqrt{2}\varepsilon_{13} = 0 \\ \Rightarrow C_{14} = C_{15} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \Rightarrow \forall \varepsilon : C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} + C_{24}\sqrt{2}\varepsilon_{23} + C_{25}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{26}\sqrt{2}\varepsilon_{12} = \\ C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} - C_{24}\sqrt{2}\varepsilon_{23} - C_{25}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{26}\sqrt{2}\varepsilon_{12} \\ \Rightarrow \forall \varepsilon : 2C_{24}\sqrt{2}\varepsilon_{23} + 2C_{25}\sqrt{2}\varepsilon_{13} = 0 \\ \Rightarrow C_{24} = C_{25} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \Rightarrow \forall \varepsilon : -(C_{14}\varepsilon_{11} + C_{24}\varepsilon_{22} + C_{34}\varepsilon_{33} + C_{44}\sqrt{2}\varepsilon_{23} + C_{45}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{46}\sqrt{2}\varepsilon_{12}) = \\ C_{14}\varepsilon_{11} + C_{24}\varepsilon_{22} + C_{34}\varepsilon_{33} - C_{44}\sqrt{2}\varepsilon_{23} - C_{45}\sqrt{2}\varepsilon_{13} + C_{46}\sqrt{2}\varepsilon_{12} \\ \Rightarrow \forall \varepsilon : 2C_{14}\varepsilon_{11} + 2C_{24}\varepsilon_{22} + 2C_{34}\varepsilon_{33} - 2C_{46}\sqrt{2}\varepsilon_{12} = 0 \\ \Rightarrow C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{46} = 0 \end{aligned}$$

En exprimant les relations de symétrie par rapport au plan, on obtient après calcul la relation de comportement (3.26).

Il reste 13 coefficients indépendants si le plan de symétrie est connu.

### 3.4.2. Symétrie par rapport au plan $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$

Le matériau étudié présente un plan de symétrie  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ . Dans ce cas, la forme de la matrice de rigidité doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. La relation de symétrie est exprimée par la formule (3.20) avec :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.30)$$

En exprimant les relations de symétrie par rapport au plan  $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ , on obtient la relation de comportement en rigidité suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3,31)$$

De la même manière que précédemment, il reste 13 coefficients indépendants.

### 3.4.3. Symétrie par rapport au plan $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$

Le matériau étudié présente un plan de symétrie  $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ . Dans ce cas, la forme de la matrice de rigidité doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. La relation de symétrie est exprimée par la formule (3.20) avec :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3,32)$$

En exprimant les relations de symétrie par rapport au plan  $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ , on obtient la relation de comportement en rigidité suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3,33)$$