3.5. Matériaux orthotropes

Un matériau *monoclinique* suivant deux plans perpendiculaires est dit *orthotrope*. De plus, un matériau qui possède deux plans de symétries perpendiculaires possède obligatoirement le troisième et ce type de matériau est dit *orthotrope*. Un matériau *orthotrope* est caractérisé par 9 constantes élastiques indépendantes si les plans de symétries sont connus. Dans le cas ou les plans $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_3)$ et $(\vec{N}_2, \vec{N}_3)$ sont des plans de symétries perpendiculaires, il faut vérifier les trois relations de symétrie simultanément. À partir des relations de comportement des matériaux monocliniques, on obtient facilement la relation de comportement des matériaux orthotropes $\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon} = \hat{S}\hat{\sigma}$ avec $\hat{S} = \hat{C}^{-1}$.

Dans la base d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$, la relation de comportement exprimée en rigidité est $\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

.............................(3.34)

Un matériau orthotrope *est caractérisé par 9 constantes élastiques indépendantes si les plans de symétries sont connus*.

3.5.1 Loi de Hooke

Formulation en souplesse

Dans la base d'orthotropie (N_1, N_2, N_3), la matrice des souplesses S d'un matériau orthotrope est exprimée en fonction des modules d'élasticité et coefficients de Poisson sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix}$$

..........................(3.35)

Si la base d'orthotropie (N1,N2,N3)est connue, les propriétés mécaniques élastiques d'un matériau orthotrope sont déterminées par neuf constantes d'élasticité indépendantes.
On peut choisir les neuf constantes suivantes E_1 , E_2 , E_3 ,G_{12} , G_{13} , G_{23} , ν_{12} , ν_{13} et ν_{23} car la matrice des souplesses ˆS est symétrique.
La matrice des souplesses ˆS étant symétrique, on impose alors les égalités suivantes sur les modules d'élasticité et coefficients de Poisson :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}; \qquad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}; \qquad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

...(3.36)

Démonstration Lorsque l'on applique un état de traction uniforme suivant l'axe N1 d'un échantillon orthotrope, on impose ±*11* **différente de 0** uniquement et on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{11}\sigma_{11} &\Rightarrow\quad \sigma_{11} &= S_{11}^{-1}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} &= S_{12}\sigma_{11} &\Rightarrow\quad \varepsilon_{22} &= S_{12}S_{11}^{-1}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} &= S_{13}\sigma_{11} &\Rightarrow\quad \varepsilon_{33} &= S_{13}S_{11}^{-1}\varepsilon_{11} \end{aligned}$$

...(3.37)

D'un point de vue expérimental, il suffit de généraliser la loi de Hooke introduite pour un matériau isotrope. Elle s'écrit classiquement en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson.

$$\sigma_{11} = E_1\varepsilon_{11}; \qquad \varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11}; \qquad \varepsilon_{33} = -\nu_{13}\varepsilon_{11}$$

..(3.38)

On déduit alors facilement les relations suivantes par identification :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; \qquad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}$$

..(3.39)

Lorsque l'on applique un état de traction uniforme suivant les deux autres axes d'un échantillon orthotrope, on obtient les relations suivantes :

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}; \qquad S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_2}; \qquad S_{33} = \frac{1}{E_3}; \qquad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_1}$$

..(3.40)

Lorsque l'on applique un état cisaillement uniforme sur un échantillon orthotrope suivant les différents plans, on obtient, par identification, les coefficients de cisaillement de la matrice de souplesse :

$$\sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12}; \qquad \sigma_{13} = 2G_{13}\varepsilon_{13}; \qquad \sigma_{23} = 2G_{23}\varepsilon_{23}$$

..(3.41)

ce qui entraîne :

$$S_{12}^{-1} = 2G_{12}; \qquad S_{13}^{-1} = 2G_{13}; \qquad S_{23}^{-1} = 2G_{23}$$

...(3.42)

<u>Formulation en rigidité</u>

Dans la base d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$, la matrice de rigidité d'un matériau orthotrope est exprimée en fonction des modules d'élasticité sous la forme $\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$ avec $\hat{C} = \hat{S}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

......................................(3.43)

avec :

$$C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}; \qquad C_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta}; \qquad C_{13} = \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}; \qquad C_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}; \qquad C_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}$$

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$$

et $C_{44} = 2G_{23}$, $C_{55} = 2G_{13}$, $C_{66} = 2G_{12}$.

Les relations sont établies à partir d'une simple inversion matricielle.

3.5.2 Loi de Hooke hors axes principaux

À titre d'exemple, les expressions des matrices de rigidité et de souplesse dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont développées en fonction des composantes dans la base d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ dans le cas particulier d'une rotation entre les deux bases autour de l'axe $\vec{N}_3 = \vec{z}$. En utilisant la notation vectorielle, on reprend les formules de changement de base (2.16). La matrice de rigidité $\hat{C}$ a alors pour expression dans la base d'orthotropie $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

....(3.44)

Dans le cas particulier de la rotation autour de l'axe $\vec{N}_3 = \vec{z}$, la matrice de changement de base $\hat{T}^{-1}$ est telle que $\hat{T} = \hat{T}^{-T}$ où $\hat{T}$ est définie dans (2.9). Après calcul, on obtient la forme de la matrice de rigidité $\hat{\bar{C}}$, par définition, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et on notera

alors par $\bar{C}_{IJ}$ ses composantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

....................................(3.45)

Les expressions des composantes de la matrice de rigidité sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{11} &= C^4C_{11} + S^4C_{22} + 2S^2C^2(C_{12} + C_{66}) \\
\bar{C}_{12} &= C_{12}(C^4 + S^4) + S^2C^2(C_{11} + C_{22} - 2C_{66}) \\
\bar{C}_{13} &= C^2C_{12} + S^2C_{23} \\
\bar{C}_{16} &= \sqrt{2}SC^3(C_{11} - C_{12} - C_{66}) + \sqrt{2}CS^3(C_{12} - C_{22} + C_{66}) \\
\bar{C}_{22} &= C^4C_{22} + S^4C_{11} + 2S^2C^2(C_{12} + C_{66}) \\
\bar{C}_{23} &= C^2C_{23} + S^2C_{12} \\
\bar{C}_{26} &= \sqrt{2}SC^3(C_{12} - C_{22} + C_{66}) + \sqrt{2}CS^3(C_{11} - C_{12} - C_{66}) \\
\bar{C}_{33} &= C_{33} \\
\bar{C}_{36} &= \sqrt{2}SC(C_{12} - C_{23}) \\
\bar{C}_{44} &= 2C^2C_{44} + 2S^2C_{55} \\
\bar{C}_{45} &= 2CS(C_{55} - C_{44}) \\
\bar{C}_{55} &= 2S^2C_{44} + 2C^2C_{55} \\
\bar{C}_{66} &= 2S^2C^2(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - C_{66}) + C_{66}(C^4 + S^4)
\end{aligned}$$

On remarque que lorsque la traction est exercée en dehors des axes d'orthotropie (axes principaux), il existe des couplages entre les déformations longitudinale, transversale et de cisaillement.