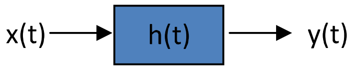
Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Un signal aléatoire est amené à être transmis, analysé, transformé, etc. Conserve-t-il son caractère aléatoire? sa stationnarité ? Que deviennent sa moyenne et son auto-corrélation statistiques lors d'un filtrage linéaire. On examinera la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel qui permettra d'aborder la notion de filtre formeur. Ces connaissances nous permettront d'envisager une application directe qui est le filtrage optimal et adapté.

1. Processus aléatoires et SLIT



Soit un système linéaire et invariant dans le temps (SLIT) défini par sa réponse impulsionnelle h(t) ou sa fonction de transfert H(f) :

Rappelons que la réponse du système linéaire et invariant à un signal quelconque déterministe est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Cette expression implique que si x(t) est un signal aléatoire, le signal en sortie y(t) est forcément un signal aléatoire puisque la sortie est une somme pondérée de l'entrée. Il faudra donc caractériser y(t) de manière statistique, de même que pour x(t), en étudiant les grandeurs statistiques déjà vues au chapitre précédent.

Moyenne et autocorrélation statistiques de y(t)

Supposons que x(t) est un processus aléatoire, la moyenne μy(t) du signal de sortie (aléatoire aussi) peut se calculer par :

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\left\{\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\}$$
$$= \int h(\tau)E\{x(t-\tau)\}d\tau = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau) = h(t) * \mu_x(t)$$

De la même façon, on peut calculer l'auto-corrélation statistique de y(t) soit R_y (t1,t2):

$$R_y(t_1,t_2) = E\{y(t_1)y^*(t_2)\} = E\{x(t_1) * h(t_1).x^*(t_2) * h^*(t_2)\} = E\left\{\int h(\tau_1)x(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int h^*(\tau_2)x^*(t_2-\tau_2)d\tau_2\right\}$$
$$= \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$

Si x(t) est stationnaire au sens large (SSL) alors:

- La moyenne statistique de y(t) devient :

$$\mu_y(t) = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau)d\tau = \int h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int h(\tau)d\tau = \mu_x H(0) \qquad (f=0)$$

- La corrélation statistique de y devient :

$$R_y(t_1,t_2) = \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$
$$= \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_x(\tau-\tau_1+\tau 2)d\tau_1 d\tau_2 = fct(\tau) = R_y(\tau)$$

Ainsi, si le signal d'entrée est stationnaire au sens large (SSL) alors le signal de sortie sera aussi SSL

<u>Densité spectrale</u>

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, la densité spectrale de puissance est obtenue :

$$S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = TF\left(E\{x(t_1)*h(t_1).x^*(t_2)*h^*(t_2)\}\right) = TF\left(E\{h(t_1)*x(t_1).x^*(t_2)*h^*(t_2)\}\right)$$
$$= TF\left(h(t_1)*E\{x(t_1).x^*(t_2)\}*h^*(t_2)\right) = TF\left(h(t_1)*E\{x(t_1).x^*(t_2)\}*h^*(t_2)\right) = TF\left(h(t_1)*R_x(t_1-t_2)*h^*(t_2)\right) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance du signal de sortie est égale à la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquences du système (la phase de H(f) n'intervient pas). C'est une propriété très importante à la base de nombreuses applications dont notamment la notion de filtre formeur et le filtrage optimal.

Par ailleurs, si l'on souhaite calculer la corrélation du signal de sortie en éludant la lourdeur de calcul inhérente au produit de convolution, on calculera la densité spectrale de puissance du signal de sortie et on prendre la transformée de Fourier inverse.

$$R_y(\tau) = TF^{-1}\left(|H(f)|^2 S_x(f)\right) = \int |H(f)|^2 S_x(f)e^{2\pi jf\tau}df$$

La puissance moyenne du signal de sortie est alors obtenue par : $E\{y(t)^2\} = R_y(0) = \int |H(f)|^2 S_x(f)df$

<u>Formule des interférences</u>

Soient y1(t) la sortie d'un système h1(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x1(t) et y2(t) la sortie d'un système h2(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x2(t). La formule de l'interférence permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres à celles des entrées de ces filtres:

$$S_{y1y2}(f) = H_1(f)S_{x1x2}(f)H_2^*(f)$$

On a aussi : $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau)*h^*(\tau) \Rightarrow S_{xy}(f) = S_x(f)H^*(f)$

et $R_{yx}(\tau) = R_x(\tau)*h(\tau) \Rightarrow S_{yx}(f) = H(f)S_x(f)$

<u>Exemple 1 :</u> Soit le processus stochastique x(t) SSL de corrélation statistique: $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle $h(t)=5e^{-2t}$. On obtient alors:

- $\mu_y(t) = \mu_x H(0) = 0 \times \frac{5}{2+2\pi jf}\Big|_{f=0} = 0 \times 5/2 = 0$

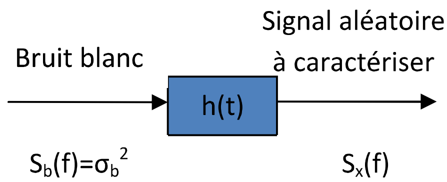
- $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left|\frac{5}{2+2\pi jf}\right|^2 .\ TF\left(\sigma^2 e^{\frac{-|\tau|}{\theta}}\right) = \frac{5.}{4+(4\pi^2 f^2)} . \frac{2\sigma^2\theta}{1+4\pi^2 f^2\theta^2}$

Exemple 2 :

Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc b(t). Sa DSP est donc une fonction constante. Alors, en sortie, on aura un signal tel que :$S_x(f)$ = constante $|H(f)|^2$

Notion de filtre formeur

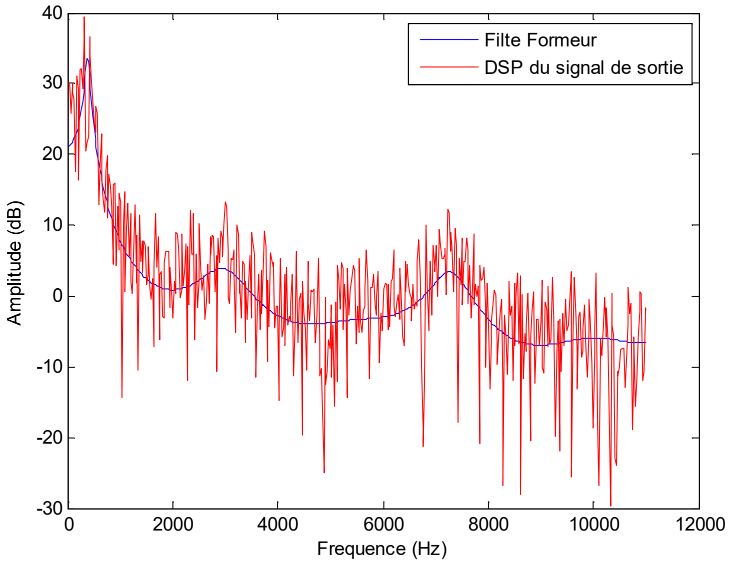
Supposons donné un signal aléatoire x(t): On appelle filtre formeur de x(t); le filtre de fonction de transfert H(f); tel que x(t) est généré par passage d'un bruit blanc b(t) dans H(f).



La détermination du filtre formeur s'effectue en inversant la formule précédente:

$$|H(f)|^2 = S_x(f)/\sigma_b{}^2$$

On pourra donc décrire le signal aléatoire par les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc. En effet, si on fait passer le bruit blanc dans un filtre linéaire et stationnaire à paramètres ajustables et si on obtient le signal désiré (à modéliser) à la sortie du filtre, alors on peut dire que toute l'information spectrale est contenue dans le filtre représenté par ses coefficients (Voir exo 1 du TP n°3)



Remarque :Ainsi le bruit blanc joue pour l'aléatoire l'équivalent de la distribution de Dirac pour le déterministe.

Rappelons que le bruit blanc n'a pas d'existence physique car il serait de puissance infinie. Une approximation du bruit blanc à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré est défini par :

$$S_b(f) = \begin{cases} \sigma_b^2 & |f| < B \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. *Application : Filtrage adapté et filtrage optimal*

La transmission d'un signal s'accompagne de distorsions (dues aux milieux de transmission) qu'il serait souhaitable d'éliminer ou au moins d'atténuer avant tout traitement ultérieur. Si l'on connait le signal (déterministe) d'origine, on parlera de détection. Dans le cas contraire ou si le signal est aléatoire on emploiera le terme estimation. Il existe de nombreuses approches de détection, on peut, entre autres procéder par filtrage qui permettra de rehausser le signal noyé dans le bruit.

Considérons un signal déterministe x(t) supposé connu, dont on souhaite tester la présence possible dans une observation s(t). Le bruit d'observation est supposé quant à lui stationnaire SSL de densité spectrale $S_b(f)$. On cherche un filtre H(f) qui maximise le SNR à un instant précis T_0.

On suppose donc que le signal utile x(t) est noyé dans un bruit b(t) stationnaire SSL additif, d'où :

$$s(t) = x(t)+b(t)$$

On filtre le signal par un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est h(t). A la sortie du filtre, on obtient un signal :

$$y(t) = s(t) * h(t) = x(t)*h(t)+b(t)*h(t) = x_2(t)+ b_2(t)$$

A la sortie du filtre et à l'instant T_0, le SNR s'écrit : $SNR(T_0) = \dfrac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))}$

Le but étant de trouver *h(t)*, on va alors exprimer le SNR en fonction de *h(t)* (ou *H(f)*), ainsi :

- Le signal au numérateur $x_2(t)$ est déterministe dons sa puissance s'exprime comme suit:

$$Puis(x_2(T_0)) = |x_2(T_0)|^2 = \left|TF^{-1}(X_2(f))\right|^2 = \left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2$$

- Le signal $b_2(t)$ est issu du filtrage d'un signal aléatoire *b(t)* SSL donc il est aussi SSL, c'est ainsi que sa puissance pourra se formuler comme suit:

$$Puis(b_2(T_0)) = E\left\{\left|b_2(T_0)^2\right|\right\} = R_{b2}(\tau = 0) = TF^{-1}(S_{b2}(f))\Big|_{\tau=0} = \int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df$$

Ainsi, on arrive à exprimer le SNR comme suit :

$$SNR(T_0) = \frac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))} = \frac{\left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2}{\int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df}$$

Que l'on peut écrire aussi, comme étant :

$$SNR(T_0) = \frac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)\,df} \qquad a(f) = \sqrt{S_b(f)}H(f) \text{ et } \qquad b(f) = X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / \sqrt{S_b(f)}$$

Pour trouver H(f) qui maximise ce rapport, on fait appel à l'inégalité de cauchy-schwartz:

$$\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2 \le \int a(f)a^*(f)\,df \quad \int b(f)b^*(f)\,df$$

Ce qui nous donne : $SNR(T_0) = \dfrac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)\,df} \leq \int b(f)b^*(f)\,df$

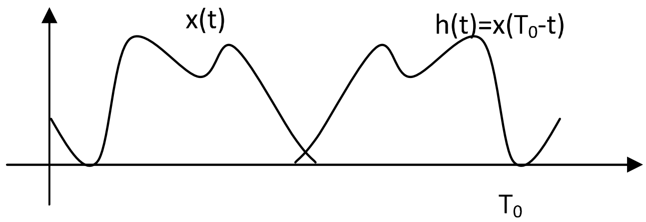
avec égalité (soit le maximum) lorsque $a(f)=kb(f) \Rightarrow$ Cette dernière nous fournit l'expression suivante du filtre optimal H(f) :

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / S_b(f)$$

L'expression du SNR devient : $SNR(T_0)_{\max} = \int \dfrac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$ (Ce maximum est indépendant de T_0)

<u>Cas particulier</u> : Par ailleurs, si le bruit b(n) est blanc, on parle de filtre adapté:

$H(f)_{adaptél} = k / \sigma_b{}^2 X^*(f)e^{-2\pi jfT0}$ donnant $h(t)_{adaptél} = k / \sigma_b{}^2 x^*(T_0 - t)$



La réponse impulsionnelle du filtre représente le signal utile x(t) renversé et décalé de T_0.Le filtrage adapté revient à effectuer l'inter-corrélation entre l'observation et le signal à détecter.

Cette réponse n'est pas causale ce qui ne permet pas de l'appliquer en temps réel. Cependant, ce filtre peut-être appliqué à un signal sauvegardé.

<u>Exemple1</u> : Détection d'une impulsion

Considérons un système émettant une impulsion x(t) rectangulaire de durée T_0 etd'amplitude A. Rec(t) étant la fonction porte égale à un pour t entre -1/2 et 1/2 et nulle ailleurs. Du fait de la parité de cette fonction, le filtre aura la même expression et sera centré en T_0.

<u>Exemple 2</u> : En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible ». Cette cible peut être par exemple un bateau ou un avion. Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal x(t), qui parcourt la distance *d* jusqu'à la cible, sur laquelle il sera réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur reçoit alors le signal *y(t)* bruité, atténué (de *a*) et retardé de T_{AR} (voir exo 2 du TP n°3)

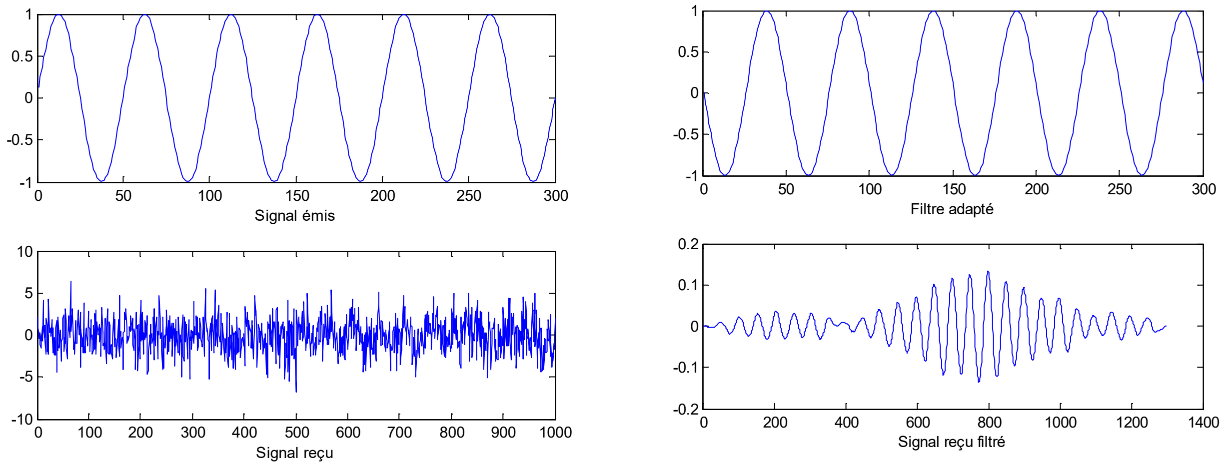
$y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$. où T_{AR} correspondant au temps d'aller-retour ($T_{AR} = 2d/v$)

On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $x(t)$, soit $h(t) = x^*(T_0 - t)$

La sortie de ce filtre sera l'intercorrélation des signaux *y(t)* et *x(t)*. On obtient alors :

$R_{yx}(t-T_0) = a.R_{xx}(t - T_0 - T_{AR}) + R_{bx}(t-T_0)$.

Sachant que l'autocorrélation est maximale en 0, l'intercorrélation sera maximale pour $t = T_0+T_{AR}$ ce qui nous permettra de déterminer T_{AR}.



Remarques

- Le choix du signal 'x' est important : Il est souhaitable que le max de sa fonction d'autocorrélation R_{xx} soit facile à identifier (pic bien visible comme pour la fonction triangle)

-Dans le cas où le signal est sinusoïdal, le filtre adapté est un passe bande idéal centré sur la fréquence du signal (détection synchrone).

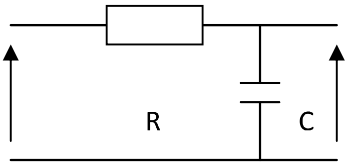
Exercice d'Application

Soit $x(t) = 1-t/T$ avec $t\ 0 \le t \le T$
On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Le signal reçu par le recepteur après réflexion sur l'objet est : $y(t)=\alpha\, x(t-T_D) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ^2. On veut maximiser le rapport signal sur bruit

1. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt=1$ (prendre $T_0=T$).
2. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
3. Exprimer l'inter-corrélation temporelle $R_{yx}(t-T_0)$ en fonction de l'auto-corrélation de $x(t)$ et de l'inter-corrélation des signaux $b(t)$ et $x(t)$
4. Comment déterminer le temps T_D?
5. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le filtrage optimal pour un signal déterministe dont on ignore l'expression?

TD n° 3 : Processus aléatoires et Filtrage linéaire

1. L'entrée x(t) du circuit donnée ci-dessous est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2\delta(\tau)$

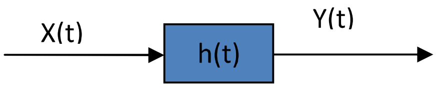


- Déterminer la densité spectrale de la sortie y(t), notée $S_y(f)$
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie y(t), notée $R_y(\tau)$ ainsi que sa puissance

2.Soit X(t) = A + b(t) un signal réel aléatoire, où A est une constante réelle et b(t) est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ_b^2, et soit un filtre moyenneur de réponse impulsionnelle:

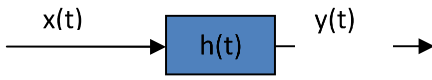
$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T(t - T/2)$$

n



- Exprimer l'autocorrélation statistique du signal d'entrée $R_{xx}(t,\tau)$
- X(t) est-il SSL ?
- Déterminer la moyenne statistique de y(t).
- Montrer que $R_{yy}(\tau) = \frac{\sigma^2}{T}\Lambda_T(\tau) + A^2$ et en déduire σ_y et μ_y.
- Prendre A=2 et tracer X(t) et Y(t).

3.On considère le schéma ci-contre où x(t)=s(t)+b(t) avec s(t) = $\Pi_1(t)$ et b(t) est un bruit blanc Gaussien centré de variance 1



- Déterminer la densité de probabilité de x(t) . x(t) est-il SSL ?

On considère b'(t) et s'(t) les sortes correspondant respectivement à b(t) et s(t).

- Calculer $S_{b'}(f)$ et $S_{s'}(f)$ en fonction de H(f)
- On veut maximiser le rapport signal sur bruit (SNR):
- Déterminer et tracer h(t) pour k=2 et T_0=2.Calculer alors le SNR.
- Quelle loi de probabilité suit y(t) (justifier).
- Donner un exemple concret de l'utilisation de ce type de filtre
- Si s(t) est déterministe et inconnu, quel filtre utilise-t-on ?

4. On dispose d'un signal reçu qui est la version bruitée retardée et atténuée d'un signal d'intérêt s(n). Le bruit b(n) est supposé blanc gaussien de variance σ^2. Le problème est de déterminer l'amplitude A et le retard $n_0$dans le signal reçu $x(n) = A.s(n - n_0) + b(n)$. Sachant que le rapport signal-à-bruit est maximum en sortie du filtre adapté de réponse h(n) = s(-n).

- Vérifier que la sortie y(n) de ce filtre s'exprime comme la somme de deux fonctions de corrélation.
- Calculer la variance $\sigma_{b'}^2$du bruit de sortie.
- On prend pour s(n) une impulsion rectangulaire de largeur L, traceralors un exemple de signal reçu et de sortie du filtre adapté.

Solutions

1. $H(f)=1/(1+2\pi jfRC)$ $S_y(f)= \sigma_x^2/(1+4(\pi fRC)^2 R_y(\tau)=\sigma_x^2/2RC\ e^{-|\tau|/RC}$ $P=R_y(0)=\sigma_x^2/2RC$
2.$R_{xx}(t,\tau)=A^2+\sigma_b^2\delta(\tau)=fct(\tau)$ $\mu_x(t)=A \Rightarrow SSL$ $H(f)=sinc(fT)e^{-\pi jfT}$ $\mu_y(t)=A$ filtre moyenneur
3. x(t) Gaussien de moyenne s(t) et de variance 1. x(t) non stationnaire $S_{b'}(f)=|H(f)|^2$ $S_{s'}(f)=|H(f)^2|sinc^2(f)$
h(t)= $2\Pi_1(2-t)$ SNR=1 y(t) Gaussien Radar ou Sonar Passe-bas (moyenneur)

4.y(n)=A.$R_s(n-n_0)$+ $R_{bs}(n)\sigma_{b'}^2=R_{b'}(0)$ $S_{b'}(f)=\sigma_b^2|H(f)|^2 \Rightarrow R_{b'}(0)=\sigma_b^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H()f|^2 df$

Exercices supplémentaires

1. Soit Y(t) un processus aléatoire défini par Y(t) = X(t+1) - X(t-1), où X(t) est un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle. Montrer que $S_Y(f) = 4 . S_X(f) . \sin^2(2\pi f)$

2. On considère le signal $x(k) = g(k)\cos(2\pi n_0 k/N+\varphi)$ défini pour $k \in [0,N-1]$, et où g(k) est une fonction aléatoire, indépendante de φ .

- Calculez l'autocorrélation de x(k)
- Déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la densité spectrale de puissance de g, $\phi_g(f)$.

Rappels : $\cos a \cos b = [1/2][\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, $\cos x = [(e^{jx} + e^{-jx})/2]$, $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = [(1-q^n)/(1-q)]$

3. On considère la transmission de deux symboles :

$s_0(t)=A$ $t\in [0,T]$

$s_1(t)=-A$ $t\in [0,T]$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit : $x(t)= s_i(t)+b(t)$ où b(t) est un bruit blanc centré de DSP σ_b^2

- Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre adapté h(t) correspondant à $s_0(t)$ telle que $\int h(t)^2dt=1$
- Même question pour $s_1(t)$.
- Donner le rapport signal sur bruit, dans chaque cas.

On note $y_{si}(t)$, la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$,

- Montrer que pour b(t) elle s'écrit : $y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(t)dt$
- Déterminer la moyenne et la variance de $y_b(T)$
- Dans l'hypothèse où le bruit blanc est Gaussien, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y= y_{si}(t)+y_b(t)$

4. On considère un signal déterministe s(t) qui modélise une impulsion (par exemple radar/sonar). Cette impulsion est réfléchie sur une cible et on suppose que le signal reçu en retour (par exemple sur l'antenne de réception) s'écrit :

$x(t) = s(t - \tau) + b(t)$

où $\tau \geq 0$ représente un retard et b(t) est un bruit blanc centré. Un traitement est appliqué au signal x(t) en réception afin de maximiser le critère de "rapport signal sur bruit". Plus précisément, on applique à x(t) un filtre dont la réponse impulsionnelle est notée h(t) et la réponse en fréquence est notée H(f).

- Rappeler comment s'exprime l'énergie E_s du signal s(t) ?
- Si y(t) est la sortie du filtre h(t) lorsque x(t) est en entrée, justifier en deux mots que l'on puisse écrire $x_e(t) = s_e(t - \tau) + b_e(t)$ où $s_e(t)$ et $b_e(t)$ sont les sorties du même filtre h(t) avec respectivement s(t) et b(t) en entrée.
- Exprimer $s_e(t)$ en fonction de H(f) et S(f) et en déduire $s_e(0) = \int H(f)S(f)\, df$.
- On note $N_0/2$ la densité spectrale de puissance de b(t).

(a) Que vaut la densité spectrale de puissance de $b_e(t)$ (notée $S_{be}(f)$) ?

(b) En déduire la puissance de $b_e(t)$. Que vaut $E\{|b_e(\tau)|^2\}$?

On désire maximiser le critère "rapport signal sur bruit" en sortie du filtre à l'instant τ par un filtrage adapté.

- Donner l'expression de h(t),H(f) et du RNS.

TP n° 3 : Filtrage des signaux aléatoires

Ce TP a pour objectif :

- D'étudier comment sont transformés les signaux aléatoires, ou plus exactement leurs caractéristiques, lors d'un filtrage linéaire. Assimiler la notion de filtre formeur.
- Aborder une application directe qui est le filtrage adapté pour la détection d'un signal connu noyé dans du bruit blanc en augmentant le SNR

Exercice 1 Reprenons le programme 3 du TP n°2 et en y rajoutant ce qui suit, on obtient :

```
clc; clear all; close all;
sigma=0.0023; fe=22050; N=1000;
bb = sqrt(sigma)*randn(N,1);

% Afficher la corrélation Sigmab et la dsp du bruit blanc Sbb(f)
Sigmab=xcorr(bb)/N;t=(-N+1:N-1);
figure; subplot(2,1,1); plot(t,Sigmab)
legend('Autocor du bruit blanc'); xlabel('Temps(s)'); ylabel('Amplitude');
Fb=fft(bb);
Sbb=abs(Fb).^2/N;
f=(0:fe/N:fe/2-1/N);
subplot(2,1,2); plot(f,abs(Sbb(1:N/2)));
legend('Densité du bruit blanc'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
% Reponse fréquentielle du filtre formeur
a=[1.0 -0.839 -0.015 -0.320 0.197  0.055 -0.285  0.067  0.044 0.003  0.178];
b=[1  0];
y= filter(b,a,bb);
[H,f]=freqz(b,a,length(f),fe);
figure; plot(f,20*log10(abs(H(1:length(f)))+eps),'r');
Ys=fft(y); plot(f,20*log10(abs(H(1:length(f)))+eps),'r',
f,20*log10(abs(Ys(1:length(f)))),'b');
legend('Filte Formeur','DSP du signal de sortie');
xlabel('Hz'); ylabel('Amplitude (dB)')
```

1. Quel est le but des lignes rajoutées ? Commenter chaque figure.
2. Quelle est la nature du filtre formeur ? A quoi peut servir ce filtre ?
3. Rajouter les instructions nécessaires pour vérifier les formules suivantes :

- $\mu_y = \mu_x \quad H(f)\big|_{f=0}$
- $S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Remarque : f=0 correspond sous matalb au 1er élément de H

4. Inverser a et b et commenter.
5. Donner une application cette notion de filtre formeur.

Exercice 2 On veut simuler l'émission et la réception d'un signal radar. On suppose que le signal émis s(n) est un signal sinusoïdal et que le signal reçu x(n) est une version bruitée (bruit blanc) atténuée et retardée du signal émis.

```
clc; clear all; close all;
%Signal émis de longueur L
L = 300; t = (1 :L)'; f0=0.02; s=sin(2*pi*f0*t);
%Signal reçu
N=1000;  var = 4; bruit = sqrt(var)*randn(N,1);
Retard = 500; A=0.8;
x= bruit;
x(Retard+t) = A*x(Retard+t)+s;
figure; subplot(211); plot(s);  xlabel('Signal émis');
subplot(212); plot(x); xlabel('Signal reçu');
% Création du Filtre adapté
for i=0:L-1;
 h(i+1)=s(L-i);
end

figure; subplot(211); plot(s);xlabel('Sig émis');
subplot(212); plot(h); xlabel('Filtre adapté');
% Filtrage
y = conv(h,x); y = y/(length(y));
figure; subplot(2,1,1); plot(x); xlabel('Signal reçu');
subplot(2,1,2); plot(y); xlabel('Signal reçu filtré');
tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L
```

1. Montrer que pour $y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$ où b(t) est un bb, on obtient lors d'un filtrage adapté ($h(t) = x^*(T_0 - t)$) en sortie l'expression suivante $R_{yx}(t\text{-}T_0) = a.R_{xx}(t\text{-}T_0\text{-}T_{AR}) + R_{bx}(t\text{-}T_0)$.
2. Que représentent A, s et x?
3. Arrive-t-on à identifier la partie comportant la sinusoïde dans le signal reçu? pourquoi?
4. Expliciter la boucle. Quel est, alors, le lien entre x et h ?
5. Expliquer l'instruction `tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L`
6. Commenter le programme plus particulièrement les figures. Quel est le but de ce programme ?
7. Tester d'autres signaux utiles (par ex : `x = ones(L,1)`) et commenter. Pour détecter le temps d'aller-retour, lequel des 2 signaux vous paraît préférable?
8. Faire varier la puissance du bruit (var=2 puis 4 en gardant une moy=0) et commenter.
9. Simuler le processus de l'aide au stationnement en mettant ce programme dans une boucle pour un Retard de 700 à 0 avec un pas de 50 et rajouter à la fin les instructions : `pause(tems_aller_retour/500);beep;` dans la boucle.