

Master 1, Energetique, S1

Transfert de chaleur et de masse approfondis

Chap V

La Conduction thermique  
instationnaire



## Chap V

# La Conduction Thermique Instationnaire

### 1/ Généralités

Le profil de température sera une fonction  
des coordonnées et du temps.

Cas général  $T = T(x, y, z, t)$

$t = 0$	action des causes thermiques	$t \rightarrow \infty$
état initial	$\rightarrow$	état stationnaire
	$q, T = f(x, y, z, t)$	$T(t_{\infty}) = T_{\infty}(x, y, z)$

### 2) Equation générale

Le problème à résoudre est formulé  
par l'équation

$$f c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T$$



Dans laquelle on suppose qu'il n'y a pas de source volumique de chaleur

$$\dot{q}_s = 0$$

Soit l'équation différentielle

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

équation différentielle instationnaire  
à un écoulement de chaleur unidimensionnel

où  $a = \frac{k}{\rho c}$  est la diffusivité thermique

$$[a] = \left( \frac{m^2}{s} \right)$$

La diffusivité traduit l'aptitude du matériau à accommoder rapidement avec une inertie thermique non nulle.

### 3) Méthode de résolution

On dispose de méthodes analytiques et de méthodes numériques



## a) Méthodes analytiques

- Solutions auto-similaires
- principe de superposition
- séparation de variables
- méthode de Fourier

## b) Méthodes numériques

- méthode de différences finies
- méthode des éléments finis

Exemple : méthode de séparation de variables

### Exercice

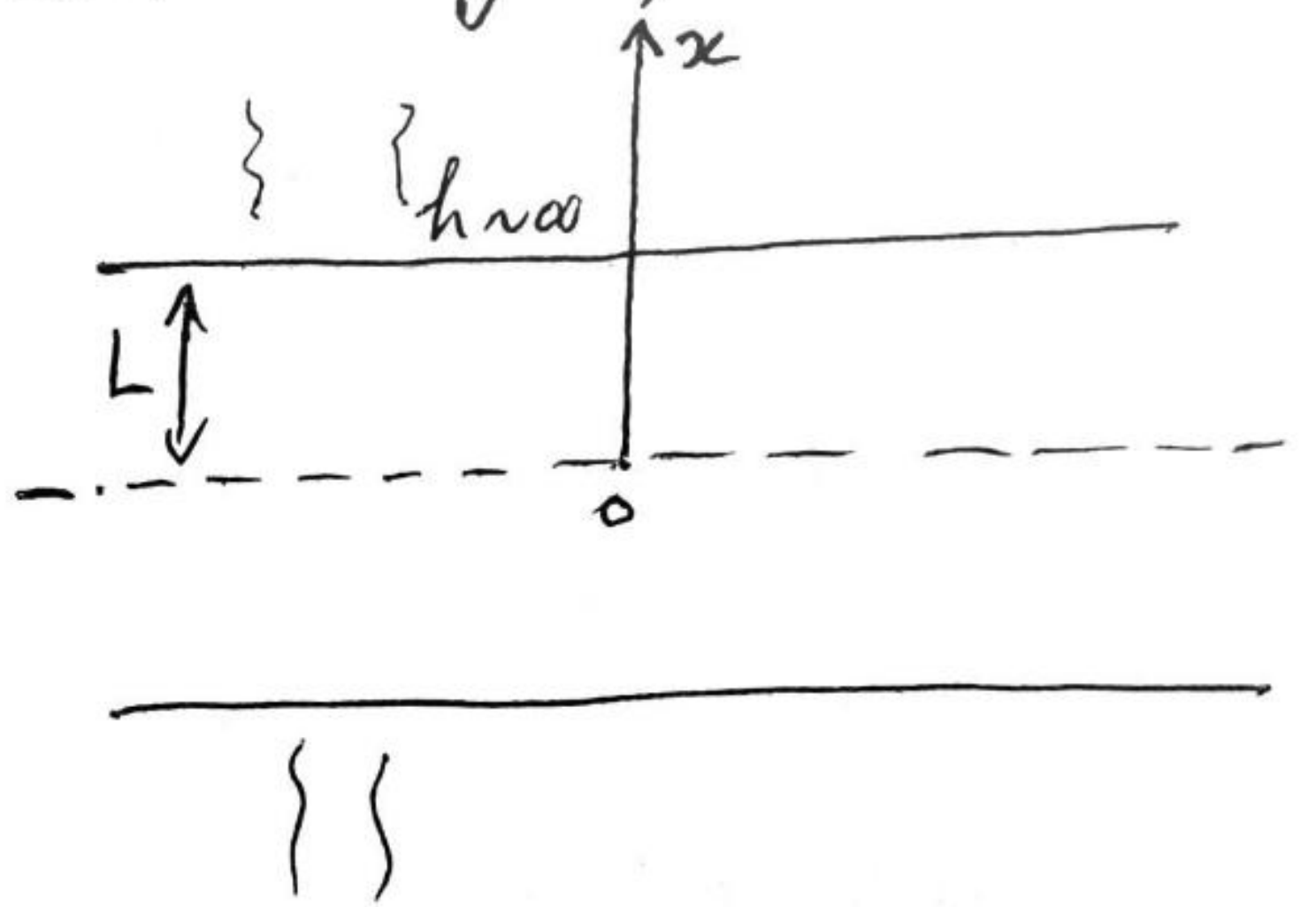
Une plaque d'épaisseur  $2L$ , de température uniforme  $T_0$  est subitement plongée dans un bain de température constante  $T_\infty$ , le coefficient  $h$  étant très grand, déterminer la température instantanée de la plaque.



Solution de l'exercice

La solution sera une fonction  $T = f(x, t)$

$$f.c \quad \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



Les conditions aux limites

03 conditions

$$\begin{cases} T(0, x) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ T(t, L) = T_{\infty} \end{cases}$$

On pose  $\theta = T - T_{\infty}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} ; a = \frac{k}{f.c}$$

Les conditions deviennent

$$\begin{cases} \theta(0, x) = \theta_0 ; \theta_0 = T_0 - T_{\infty} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ \theta(t, L) = 0 \end{cases}$$

On cherche  $\theta$  sous la forme

$$\theta = X(x) \cdot \tau(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{a}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2$$

La résolution donne

$$\tau_n = B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$X_n = A_n \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{a}} x$$

$$\theta_n = X_n \cdot \tau_n$$