

Chapitre I

Généralités sur les systèmes non linéaires

I.1. INTRODUCTION

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques: satellites, avions, automobiles, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires...

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui tiennent compte de l'état du système à chaque instant.

I.2. REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

Supposons que l'on dispose d'un modèle linéaire d'un procédé sous la forme d'une représentation d'état, la représentation d'état de ces systèmes, quand ils sont à temps continu, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où x , u et y représentant respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, tel que: $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$ et $y \in \mathfrak{R}^p$; A , B , C et D sont des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$ respectivement

I.3. REPRESENTATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Un phénomène est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport à l'autre. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré [2].

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint. Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement à des systèmes linéaires [2].

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Où x , u et y représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions non linéaires du vecteur d'état décrivant le système [3].

** La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.3})$$

Où t est le temps, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ et $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de commande (d'entrée), tel que: $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ est une fonction non linéaire.

I.4. POINTS D'EQUILIBRE

Le point $x_e(t) \in \mathfrak{R}^n$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.6})$$

Si

$$\dot{x}(t) = f(x_e, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.7})$$

Si x_e est un point d'équilibre du système (I.6) alors l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad \forall t \geq t_e, \quad x(t_e) = x_e \quad (\text{I.8})$$

admet une solution unique :

$$x(t) = x_e \quad \forall t \geq t_e \quad (\text{I.9})$$

I.5. EXEMPLE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Dans cette section, nous allons donner quelques modèles des systèmes non linéaires. Ces exemples incluent le pendule inversé.

Le système pendule inversé à modéliser est représenté par la figure I.2. En exerçant une force horizontale $u(t)$ sur le chariot, celui-ci se déplace en translation de x mètre et provoque une déviation du pendule de θ radians.

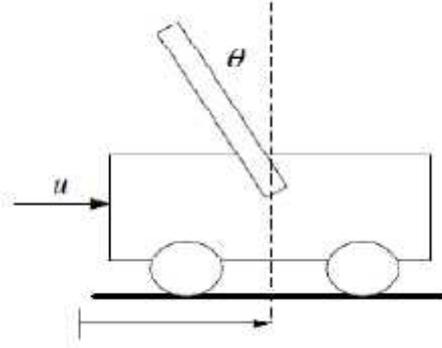


Figure I.2. Pendule inversé

Le modèle dynamique peut s'écrire [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(m_c + m)g \sin x_1 - mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} + \frac{\cos x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} u(t) + d(t) \end{cases} \quad (I.11)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{4/3mlx_2^2 \sin x_1 + mg \cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} + \frac{4}{3.(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} u(t) + d(t) \end{cases}$$

Ou x_1 position angulaire, x_2 vitesse angulaire, x_3 position de chariot, x_4 vitesse de chariot, g la gravité, m_c la mass de chariot, m la mass de pendule, l la longueur de pendule centre de mass et $d(t)$ est un bruit.

I.6. COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande est l'ensemble des opérations qui amènent automatiquement un procédé d'un état particulier à un état désiré $y_d(t)$ [5].

Un système commandé est soumis à des perturbations et des variations paramétriques telles que les frottements, vent, bruit de mesure, etc. Voir la figure I.3.

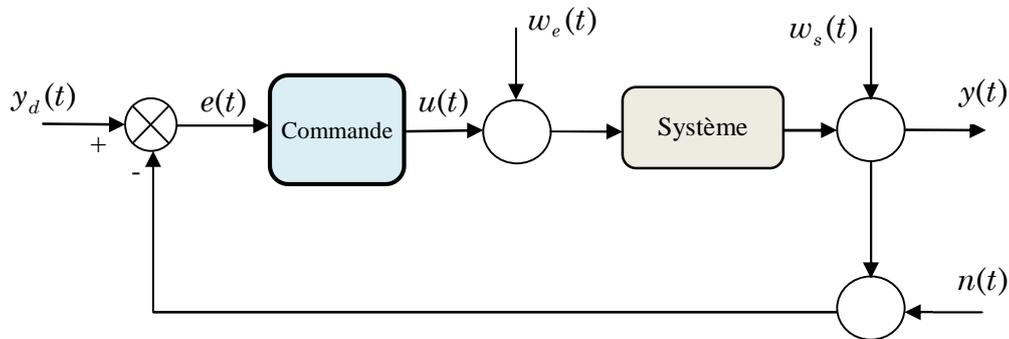


Figure I.3. Schéma de principe d'une commande d'un système non linéaire

Les signaux utilisés dans cette figure sont :

- $y_d(t)$: consigne ou signal de référence.
- $y(t)$: signal de sortie ou réponse de référence.
- $e(t)$: erreur de suivi.
- $u(t)$: signal de commande.
- $w_e(t)$: perturbations de la commande.
- $w_s(t)$: perturbations de la sortie.
- $n(t)$: bruit de mesure perturbations de la sortie.

Si la consigne $y_d(t)$ une constante dans le temps, nous parlons de régulation si non la commande est un asservissement ou poursuite des trajectoires. Par ailleurs, la commande d'un système a comme objectif d'atteindre les performances suivantes :

- a) *La stabilité*
- b) *La robustesse*
- c) *La rapidité*
- d) *La précision*

I.7. LINEARISATION AU TOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

Les premières tentatives d'approche des systèmes non linéaires sont basées sur la linéarisation au tour d'un point de fonctionnement. En fait, la linéarisation d'un système non linéaire ne donne qu'une description partielle du transfert entrée/sortie. Pour ce fait nous allons illustrer par un exemple cette mauvaise caractéristique :

Exemple d'un satellite

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Avec u est bornée $|u| \leq 1$, satellite non sphérique $a_3 \neq 0$ et $a_1 b_2^2 \neq a_2 b_1^2$. Pour ce système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x, u) \quad (\text{I.13})$$

$$\text{Avec : } f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad g(x, u) = \begin{pmatrix} b_1 u \\ b_2 u \\ 0 \end{pmatrix}$$

On linéarise au tour d'un point de fonctionnement $x_0(0,0,0)$:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{I.14})$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 x_3 & a_1 x_2 \\ a_2 x_3 & 0 & a_2 x_1 \\ a_3 x_2 & a_3 x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \Big|_{x=x_0} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etude de la commandabilité :

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.15}$$

$\det Q_c = 0 \Rightarrow$ le système linéarisé n'est pas commandable alors que le système non linéaire est commandable.

I.8 DEFERENCE ENTRE SYSTEMES LINEAIRE ET NON LINEAIRE

Pour les systèmes linéaires la loi de commande est donnée par retour d'état :

$$u = -K^T x + w \tag{I.16}$$

Qu'on peut la trouvé par :

- (a) placement de pole,
- (b) optimisation par la résolution de l'équation de Riccati,
- (c) les régulateurs RST...

Pour les systèmes non linéaires la synthèse d'une stratégie de commande non linéaire (Backstepping, SMC...) est indispensable.

$$u = u(x) \tag{I.17}$$

Tableau I.1 Déférences entre les systèmes linéaires et non linéaires

Système linéaire	Système non linéaire
$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \\ y = h(x) \end{cases}$
Transformée de Laplace	Géométrie différentiel
Espace d'état	Variété d'état ou différentiable
Fonctions de transfert	Série génératrice
La commande $u = -k^T x + w$	La commande $u = u(x)$

I.9 CONCLUSION

Ce chapitre permis de présenté une brève introduction, motivation et état de l'art sur les systèmes non linaires pour amener et justifier les choix et l'orientation de ce cours. Il est question donc de rappeler les différentes notions théoriques, définitions et concepts relatifs à ces domaines. Étant donné que l'objectif de ce cours est l'application des techniques de commande aux systèmes non linéaires, des notions élémentaires de la géométrie différentielle doit s'impose. Ce si fera l'objectif de chapitre suivant.