الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية

التمرين الأول:

تقوم شركة العجائن عمر بن عمر بإنتاج نوعين من المنتوجات (الكسكس والمقرونة)؛ باستعمال المادتين A وB، الحد الأقصى المتاح لهما هو 6 طن و8 طن على التوالي، في حين أن الطلب اليومي عليهما يوضحه الجدول التالي:

	الكسكس	المقرونة	المادة المتاحة بالطن
المادة الأولية A	1	2	6
المادة الأولية B	2	1	8

بعد دراسة السوق تم إعطاء الملاحظات التالية:

الطلب اليومي على المقرونة ناقص الطلب اليومي على الكسكس لا يمكن أن يتجاوز 1 طن.

الطلب اليومي على المقرونة لا يمكن أن يتجاوز 2 طن.

✓ الأسعار قدرت بـ 300 دولار لطن الواحد من الكسكس؛ و200 دولار لطن الواحد من المقرونة.

المطلوب: إذا كنت مشرفا على دائرة الإنتاج، كم يجب على هذه المؤسسة أن تنتج من هذين المنتجين لكي تحقق أكبر عائد ممكن؟

الحل:

1/ صياغة البرنامج الخطي:

X_1: الأطنان المنتجة من الكسكس. X_2 : الأطنان المنتج من المقرونة.

وعليه فإن دالة الهدف (تعظيم الأرباح) سوف تكون على النحو التالي: $\mathbf{Max\ Zp= 300x_1+200x_2}$

أما القيود فهي نوعان: قيود تقنية (الطاقة التشغيلية للأقسام): $\mathbf{x_1+2x_2 \le 6}$ $\mathbf{x_2-x_1 \le 1}$

قيود اقتصادية (طاقة السوق): $\mathbf{2x_1+1x_2 \le 8}$ $\mathbf{x_2 \le 2}$

شرط عدم السلبية: $\mathbf{x_1.x_2 \ge 0}$ ، اي أنه يجب أن تكون الكميات المنتجة من كل نوع من السلع موجبة(بمعنى أخر إما أن هناك إنتاج أو لا يوجد إنتاج).

مما سبق يمكن القول أن الصيغة الكلية للمشكلة هي كالتالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Zp= 300x_1+200x_2 \\ &\text{St}: x_1+2x_2 \le 6 \\ &\quad 2x_1+1x_2 \le 8 \\ &\quad x_2-x_1 \le 1 \\ &\quad x_2 \le 2 \\ &\quad x_2 \ge 0 \quad x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

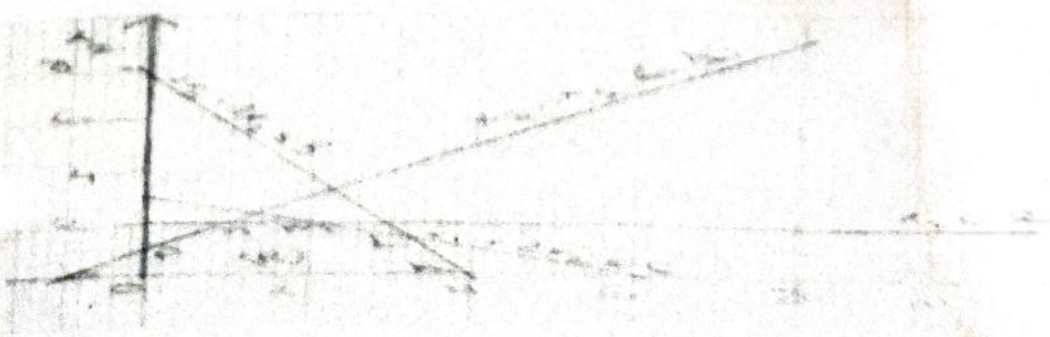
2/ تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$x_1+2x_2 = 6$
$2x_1+1x_2 = 8$
$x_2-x_1 = 1$
$x_2=2$

3/ إيجاد نقاط التقاطع على المحور $x_1.x_2$

$x_2=2$			$x_2-x_1=1$			$2x_1+1x_2 = 8$			$x_1+2x_2 = 6$		
	x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2
g	0	2	e	0	1	c	0	8	a	0	3
			f	-1	0	d	4	0	b	6	0

4/ تمثيل المعادلات بيانيا:



5/ تحديد ركن الحل الامثل:

منطقة الحلول الممكنة ممثلة في النقاط (o.k.l.m.n.p) ونرمز لها بالرمز R، إن أي نقطة ضمنها تمثل حلا ممكنا للمشكلة، وهذا يعني أن هناك حلول ممكنة كثيرة لها. أما الحل الأفضل فإنه يتمثل في النقاط الخمسة (k.l.m.n.p) وتستثنى النقطة (o) لأنها تمثل نقطة الأصل.

إن تحديد نقطة الحل الأمثل تتم بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة تقييم كافة نقاط الركنية.
- طريقة رسم دالة الهدف.

تقييم كافة نقاط الركنية o.k.l.m.n.p:

التقاطع	الربح (بالدولار)	الإحداثيات	النقاط الركنية
نقطة الأصل	0	(0.0)	O
تقاطع القيد (2) مع المحور x_1	1200	(4.0)	k
تقاطع القيدين (1) و (2)	1266.66	(10/3 . 4/3)	l
تقاطع القيدين (1) و (4)	1000	(2.2)	m
تقاطع القيدين (3) و (4)	700	(1 .2)	n
تقاطع القيد (3) مع المحور x_2	200	(0.1)	p

من خلال تقييم الأركان (o.k.l.m.n.p) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أكبر قيمة هي:

Max ZpL= 300(10/3)+200(4/3)=1266.66$

تقع عند النقطة L ذات الإحداثيات (10/3. 4/3)

6/ اتخاذ القرار:

بصفتي مديرا للإنتاج فان أحسن قرار إنتاجي يمكن اتخاذه لتعظيم الأرباح هو: إنتاج 10/3 طن من الكسكس و4/3طن من المقرونة لتحقيق ربح قدره 1266.66 دولار.

التمرين الثاني:

لديك البرنامج الخطي التالي:

St : Min Zp= $8X_1+3X_2$ المخاطرة الإجمالية

$50X_1+100X_2 \leq 1200$ الموارد المالية المتاحة

$5X1+4X2 \geq 60$ العائد السنوي

$X2 \geq 3$ عدد الوحدات الأدنى في السوق المالية

$X1.X2 \geq 0$

حيث تمثل: X_1 الوحدات المشتراة من المخزون المالي؛ بينما تمثل **X2** الوحدات المشتراة في السوق المالي (الوحدات مقدرة بآلاف).

المطلوب :

1. أوجد مجال العملية لـ العائد السنوي.
2. كيف يتغير الحل الأمثل وقيمته في حالة ما العائد السنوي زاد إلى 65 .
3. كيف يتغير الحل الأمثل وقيمته في حالة ما قياس المخاطرة للمخزون المالي تغير من 8 إلى 9.

الحـــــل:

أولا: إيجاد مجال العملية للعائد السنوي.

أ/ البحث عن الحل الامثل للبرنامج:

$\text{Min } Zp= 8x_1+3x_2$

$50x_1+100x_2 \leq 1200$

$5x_1+4x_2 \geq 60$

$x_2 \geq 3$ $\quad x_1.x_2 \geq 0$

- تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$50\ x_1+100x_2 = 1200$

$5x_1+4x_2 = 60$

$x_2=3$

- إيجاد نقاط التقاطع على المحور $x_1.x_2$

$x_2=3$			$5x_1+4x_2 = 60$			$50x_1+100x_2 = 1200$		
	x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2
e	0	3	c	0	15	a	0	12
			d	12	0	b	24	0

- تمثيل المعادلات بيانيا:

- تحديد ركن الحل الامثل:

منطقة الحلول الممكنة ممثلة في النقاط (k.l.m.) ونرمز لها بالرمز R، إن أي نقطة ضمنها تمثل حلا ممكنا للمشكلة، وهذا يعني أن هناك حلول ممكنة كثيرة لها. إن تحديد نقطة الحل الأمثل من منطقة الحلول الممكنة يتم بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة تقييم كافة نقاط الركنية. - طريقة رسم دالة الهدف.

- تقييم كافة نقاط الركنية k.M .L:

النقاطع	الربح (بالدينار)	الإحداثيات(بالاف)	النقاط الركنية
تقاطع القيدين (1) و (2)	62000	(4000 .10000)	m
تقاطع القيدين (2) و (3)	85800	(9600 .3000)	k
تقاطع القيدين (1) و (3)	153000	(18000 .3000)	l

من خلال تقييم الأركان (k.l.m) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أدنى قيمة هي لما Min ZpL= 8(4000)+3(10000)=62000da تقع عند النقطة m ذات الإحداثيات (4000 .10000)

- اتخاذ القرار:

إن أحسن قرار استثماري يضمن لنا انخفاض درجة المخاطرة إلى أدناها هو في شراء 4000 سهم من المخزون المالي و10000 سهم من السوق المالي.

ب/ البحث عن أعلى عائد سنوي ممكن تحقيق:

من التمثيل البياني السابق يظهر لنا أن أعلى عائد سنوي يمكن تحقيقه هو عند النقطة (L) ذات الإحداثيات (18.3) التي تنص على شراء 18000 سهم من المخزون المالي و3000 سهم من السوق المالية لتحقيق عائد قدره 102000 دج ودرجة مخاطرة إجمالية قدرها 153000 دينار، وأي ارتفاع أعلى من هذا الحد سوف يؤثر على البرنامج الخطي (برنامج ليس له حل).

القيد الخاص بالعائد السنوي هو القيد الثاني: $5x_1+4x_2=60$

بتعويض إحداثيات النقطة (L) في القيد الثاني نجد أن مقدر التغير في العائد السنوي هو 42000 دج أي أن أعلى قيمة له هي 102000دج

$5(18)+4(3)=60+\Delta_2$

$108=60+\Delta_2$

$42=\Delta_2$

يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه سابقا من نتائج في الجدول التالي:

المورد	طبيعة المورد	أقصى تغير في مستوى المورد	أقصى تغير في العائد Zp	u_i
الثاني	نادر	42=60-102	91000=62000-153000	2166.66=(60-102) ÷ (62000-153000) دج

جـ/ البحث عن أدنى عائد سنوي ممكن تحقيق:

كما يظهر لنا من التمثيل البياني السابق أن أدنى عائد سنوي يمكن تحقيقه هو عند النقطة (S) ذات الإحداثيات (0.12) التي تنص على عدم شراء أي سهم من المخزون المالي،و شراء12000سهم من السوق المالية لتحقيق عائد قدره 48000 دج ودرجة مخاطرة إجمالية قدرها 36000دينار، و هو ادنى عائد يمكن تحقيقه خلال السنة واي انخفاض للعائد على الحد سوف يؤثر على البرنامج الخطي.

القيد الخاص بالعائد السنوي هو القيد الثاني: $5x_1+4x_2=60$

بتعويض إحداثيات النقطة (S) في القيد الثاني نجد أن مقدر التغير في العائد السنوي هو 12000 دج أي أن أدنى قيمة له هي 48000دج

$5(0)+4(12)=60-\Delta_2$

$48=60-\Delta_2$ $12=\Delta_2$

يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه سابقا من نتائج في الجدول التالي:

المورد	طبيعة المورد	أقصى تغير في مستوى المورد	أقصى تغير في العائد Zp	u_i
الثاني	نادر	48=60-12	12000=62000-48000	(62000-36000) ÷ (60-48)=2166.66 دج

مما سبق يمكن القول أن مقدار التغير في العائد السنوي محصور بين: $42 \leq \Delta_2 \leq 12$، بمعنى أخر أن مجال العملية للعائد السنوي محصور بين أعلى عائد يمكن تحقيقه والمقدر بـ 102000 دينار وأدنى عائد يمكن الحصول عنه والمقدر بـ48000 دينار (102000≥ العائد السنوي≥48000).

ثانيا: في حال ما تم زاد العائد السنوي إلى 65 فإن درجة المخاطرة سوف ترتفع إلى 72833.33دج

الطريقة الأولى: في حال ما زاد العائد السنوي إلى 65 فإن درجة المخاطرة الإجمالية سوف ترتفع إلى 72833.33 دج وهذا بناءا إجابة السؤال الأول لان كلما زاد العائد السنوي بوحدة واحدة فإن درجة المخاطرة سوف ترتفع بـ 2166.66 دج وهذا في حدود معينة؛

وعليه فإن درجة المخاطرة الاجمالية = 62000+(60-65)×2166.66= 72833.33 دج

الطريقة الثانية: في حال ما زاد العائد السنوي إلى 65 فإن البرنامج سوف يصبح على النحو التالي:

$$\text{Min } Zp = 8x_1+3x_2$$
$$50x_1+100x_2 \leq 1200$$
$$5x_1+4x_2 \geq 65$$
$$x_2 \geq 3 \qquad x_1.x_2 \geq 0$$

وعليه فإن الإحداثيات الخاصة بالقيد الثاني سوف تتغير لتصبح على النحو التالي: $(x_1=0 \Leftarrow x_2=65/4)$ و$(x_2=0 \Leftarrow x_1=13)$ وبالتمثيل البياني للاحداثيات الجديدة تصبح منطقة الحل الممكنة الجديدة هي (.p.l.n)

التقاطع	الربح (بالدينار)	الإحدثيات	النقاط الركنية
تقاطع القيدين (1) و (2)	72833.33	(5666.66 .9166.6)	p
تقاطع القيدين (2) و (3)	93800	(10600 .3000)	n
تقاطع القيدين (1) و (3)	153000	(18000 .3000)	l

من خلال تقييم الأركان (p.l.n) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أدنى قيمة هي لما

$\text{Min } Zp_p = 8(5666.66)+3(9166.66)=72833.33da$

تقع عند النقطة p ذات الإحداثيات (9166.6 ; 5666.6)

يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه سابقا من نتائج في الجدول التالي:

المورد	طبيعة المورد	أقصى تغير في مستوى المورد	أقصى تغير في العائد Zp	u_i
الثاني	نادر	5=60-65	10833.33=62000-72833.33 دج	(62000-72833.3) ÷ (60-65)=2166.66 دج

اتخاذ القرار:

في حال ما ارتفع العائد السنوي إلى 65 دج فإن القرار الاستثماري الخاص بشراء الأسهم سوف يتأثر بذلك؛ حيث سوف تزيد درجة المخاطرة الإجمالية بـ .2166دج عن كل دينار مضاف في العائد السنوي، كما ستتغير تركيبة الأسهم المشراة من 4000 سهم من المخزون المالي إلى 5666.66 سهم، و10000 سهم من السوق المالي إلى 9166.6 سهم.

ثالثا: في حالة ما تغير قياس المخاطرة للمخزون المالي من 8 إلى 9. فإن الحل الأمثل للبرنامج سوف يتغير إلى 66000 دج ؛ أي انه بزيادة درجة المخاطرة للمخزون المالي بوحدة واحدة سوف يزيد درجة الخاطرة الأجمالية بـ 4000 دج و هذا بناءا على:

في حال ما تغير قياس المخاطرة للمخزون المالي من 8 إلى 9 فإن دالة الهدف سوف تصبح عل النحو التالي : $\text{Min } Zp = 9x_1+3x_2$

وعليه يصبح البرنامج الخطي الجديد كالتالي:

$$\text{Min } Zp = 9x_1+3x_2$$
$$50x_1+100x_2 \leq 1200$$
$$5x_1+4x_2 \geq 65$$
$$x_2 \geq 3 \qquad x_1.x_2 \geq 0$$

و بما أن القيود لم تتغير فإن منطقة الحلول الممكنة منطقة ممثلة في النقاط (.k.l.m) لم تتغير

- **تقييم كافة نقاط الركنية** k.M .L:

التقاطع	الربح (بالدينار)	الإحدثيات(بالاف)	النقاط الركنية
تقاطع القيدين (1) و (2)	66000	(4000 .10000)	m
تقاطع القيدين (2) و (3)	95400	(9600 .3000)	k
تقاطع القيدين (1) و (3)	171000	(18000 .3000)	l

من خلال تقييم الأركان (k.l.m) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أدنى قيمة هي لما

$\text{Min } Zp_p = 9(4000)+3(10000)=66000da$

تقع عند النقطةm ذات الإحداثيات (4000 ; 10000)

التمرين الثالث:

التمرين الثالث:

يقوم مجمع كوندور للصناعات الالكترونية بإنتاج نوعين من الألواح الالكترونية (رفيعة الجودة ومتوسطة الجودة) عبر ثلاث ورشات؛ متطلبات زمن الإنتاج وسعر البيع لكل وحدة منتجة موضح بالجدول التالي :

	زمن الإنتاج (ساعات)				
النموذج	الورشة الأولى	الورشة الثانية	الورشة الثالثة	سعر البيع	تكلفة الانتاج
رفيعة الجودة	1	1/2	1/8	20000	12000
متوسطة الجودة	3/2	1/3	1/4	13000	8000
ساعات الإنتاج المتاحة	900	300	100		

المطلوب: بافتراض أن المؤسسة مهتمة بتعظيم الربح، أجب على الآتي:

1- أوجد البرنامج الخطي للمؤسسة.

2- أوجد الحل الأمثل للبرنامج ؟

3- ما هي ساعات الإنتاج الممكن تخطيها لكل ورشة؟

4- أوجد مقدار الزيادة المسموح بها للمورد الثاني؟

الحل

1/ صياغة البرنامج الخطي:

X_1: اللوحة الالكترونية رفيعة الجودة. X_2 : اللوحة الالكترونية متوسطة الجودة.

هامش الربح = سعر البيع – تكلفة الانتاج

هامش الربح للوحة الالكترونية رفيعة الجودة= 20000-12000=8000 دج

هامش الربح للوحة الالكترونية متوسطة الجودة= 13000-8000=5000 دج

وعليه فإن دالة الهدف (تعظيم الأرباح) سوف تكون على النحو التالي: $\mathbf{Max\ Zp= 8000x_1+5000x_2}$

القيود التقنية (الطاقة التشغيلية للأقسام): $\mathbf{x_1+3/2x_2 \leq 900}$ $\mathbf{1/2x_1+1/3x_2 \leq 300}$ $\mathbf{1/8x_1+1/4x_2 \leq 100}$

شرط عدم السلبية: $\mathbf{x_1.x_2 \geq 0}$ ، أي أنه يجب أن تكون الكميات المنتجة من كل نوع من السلع موجبة(بمعنى أخر إما أن هناك إنتاج أو لا يوجد إنتاج).

مما سبق يمكن القول أن الصيغة الكلية للمشكلة هي كالتالي:

$$\text{Max } Zp= 8000x_1+5000x_2$$
$$\text{St : } x_1+3/2x_2 \leq 900$$
$$1/2x_1+1/3x_2 \leq 300$$
$$1/8x_1+1/4x_2 \leq 100$$
$$x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0$$

2-إيجاد الحل الأمثل للبرنامج .

***تحويل المتراجحات إلى معادلات:**

$$x_1+3/2x_2 = 900$$
$$1/2x_1+1/3x_2 = 300$$
$$1/8x_1+1/4x_2=100$$

إيجاد نقاط التقاطع على المحور $x_1.x_2$

			$1/2x_1+1/3x_2 \leq 300$			$x_1+3/2x_2 \leq 900$		
	x1	x2		x1	x2		x1	x2
e	0	400	c	0	900	a	0	600
f	800	0	d	600	0	b	900	0

*تمثيل المعادلات بيانيا:

* تحديد ركن الحل الامثل:

منطقة الحلول الممكنة ممثلة في النقاط (o.k.l.m) ونرمز لها بالرمز R، إن أي نقطة ضمنها تمثل حلا ممكنا للمشكلة، وهذا يعني أن هناك حلول ممكنة كثيرة لها. أما الحل الأفضل فإنه يتمثل في النقاط الخمسة (k.l.m) وتستثنى النقطة (o) لأنها تمثل نقطة الأصل.

- تقييم كافة نقاط الركنية o.k.l.m.n.p:

التقاطع	الربح (دينار/ ألاف)	الإحداثيات	النقاط الركنية
نقطة الأصل	0	(0.0)	O
تقاطع القيد (2) مع المحور x_1	4800	(600.0)	k
تقاطع القيدين (2) و (3)	4750	(500 . 150)	l
تقاطع القيد (3) مع المحور x_2	2000	(0.400)	m

من خلال تقييم الأركان (o.k.l.m) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أكبر قيمة هي:

Max Zp= 8000(600)+5000(0)=4800000da

تقع عند النقطة k ذات الإحداثيات (600.0)

* اتخاذ القرار:

ان أحسن قرار إنتاجي يمكن اتخاذه لتعظيم الأرباح هو في إنتاج 600 لوحة رفيعة الجودة لحقيق ربح قدره 4800000 دج.

3/ تحدد ساعات الانتاج الممكن تخطيها لكل ورشة.

القيد الأول والخاص بورشة الاولى: $x_1+3/2x_2 = 900$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_2=0$ ،$x_1=600$) نجد:

$(600)+3/2(0) = 900+\Delta_1 \Leftarrow 600 = 900+\Delta_1 \Leftarrow -600- = \Delta_1$

وعليه فإن الساعات غير المستغلة في الورشة الاولى تتمثل في 600 ساعة عمل ، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد متوفرا.

القيد الثاني والخاص بورشة الثانية: $1/2x_1+1/3x_2 \leq 300$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_2=0$ ،$x_1=600$) نجد:

$1/2(600)+1/3(0) = 300+\Delta_2 \Leftarrow 300= 300+\Delta_2 \Leftarrow 0= \Delta_2$

وعليه فإن الورشة الثانية يستغل جميع الساعات بها، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد نادرا. (وعليه يمكن زيادة ساعات العمل بها)

القيد الثالث والخاص بورشة الثالثة: $1/8x_1+1/4x_2 \leq 100$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_2=0$ ،$x_1=600$) نجد:

$1/8(600)+1/4(0) = 100+\Delta_3 \Leftarrow 75 = 100+\Delta_3 \Leftarrow -25= \Delta_3$

وعليه فإن الساعات غير المستغلة في الورشة الثالثة تتمثل في 25 ساعة عمل ، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد متوفرا.

5- ايجاد مقدار الزيادة المسموح بها للمورد الثاني.

من التمثيل البياني السابق يظهر لنا أن أعلى عائد سنوي يمكن تحقيقه هو عند النقطة (s) ذات الإحداثيات (800.0) التي تنص على بيع 800 لوح الكتروني رفيع الجودة لتحقيق عائد قدره 6400000 ، وأي ارتفاع أعلى من هذا الحد سوف يؤثر على البرنامج الخطي وطبيعة القيد (قيد فائض).

القيد الخاص بالورشة الثانية هو القيد الثاني: $1/2x_1+1/3x_2=300$

بتعويض إحداثيات النقطة (س) في القيد الثاني نجد أن مقدار التغير هو 100 ساعة عمل أي أن أعلى قيمة لها هي 400ساعة عمل

$1/2(800)+1/3(0)=300+\Delta_2$

$400=300+\Delta_2$

$400=\Delta_2$

يمكن تلخيص ما تم التوصل إليه سابقا من نتائج في الجدول التالي:

المورد	طبيعة المورد	أقصى تغير في مستوى المورد	أقصى تغير في العائد Zp	u_i
الثاني	نادر	100=300-400	1600000=4800000-6400000	16000000 ÷ 100=16000دج

التمرين الرابع:

مصنع للالكترونيات الصغيرة ينتج نموذجين من الآلات الحاسبة هما : الحاسبة التجارية والحاسبة العلمية.

كلا نوعين من الحاسبتين يمر عبر ثلاثة أقسام هي:

قسم التسليك: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 55 ساعة عمل يوميا.

قسم التجميع: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 72 ساعة عمل يوميا.

قسم الاختبار: عدد ساعات العمل المتاحة به هو 20 ساعة عمل يوميا.

الحاسبة التجارية الواحدة تتطلب 2 ساعة عمل في قسم التسليك و12 ساعات في قسم التجميع و2 ساعة في قسم الاختبار.

الحاسبة العلمية الواحدة تتطلب 4 ساعات عمل في القسم التسليك و6 ساعات عمل في قسم التجميع و4 ساعات عمل في قسم الاختبار.

إذا كان ربح الحاسبة التجارية الواحدة يقدر بـ 25 دينار؛ في حين يقدر ربح الحاسبة العلمية الواحدة بـ 30 دينار.

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع.
2. أوجد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين والتي تجعل الربح في أعظم قيمة باستخدام الطريقة البيانية؟
3. حدد الطاقات غير المستغلة من كل قسم إن وجدت؟

الحل:

1/ صياغة البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المصنع:

X_1: الإنتاج من الآلات الحاسبة التجارية. X_2 : الإنتاج من الآلات الحاسبة العلمية

ربح المحقق من بيع الآلة الحاسبة التجارية الواحدة هو: 25 دج

ربح المحقق من بيع الآلة الحاسبة العلمية الواحدة هو: 30 دج

وعليه فإن دالة الهدف (تعظيم الأرباح) سوف تكون على النحو التالي: $\mathbf{Max\ Zp= 300x_1+200x_2}$

إنتاج الآلة الحاسبة (كلا النوعين) يمر على عبر ثلاث مراحل (3 قيود) هي:

المرحلة الأولى: مرحلة التسليك، الطاقة التشغيلية القصوى بها هي 55 ساعة في الأسبوع؛ حيث الآلة الحاسبة التجارية الواحدة تستغرق ساعتين في هذا القسم ؛ في حين أن الآلة الحاسبة العلمية الواحد تستغرق 4 ساعات بها.

المرحلة الثانية: مرحلة التجميع، الطاقة التشغيلية القصوى بها هي 72 ساعة في الأسبوع؛ حيث الآلة الحاسبة التجارية الواحدة تستغرق نصف يوم في هذا القسم ؛ في حين أن الآلة الحاسبة العلمية الواحد تستغرق 6 ساعات بها.

المرحلة الثالثة: مرحلة الإختبار، الطاقة التشغيلية القصوى بها هي 20 ساعة في الأسبوع؛ حيث الآلة الحاسبة التجارية الواحدة تستغرق ساعتين في هذا القسم ؛ في حين أن الآلة الحاسبة العلمية الواحد تستغرق 4 ساعات بها.

وعليه فإن القيود التقنية (الطاقة التشغيلية للأقسام): $\mathbf{2x_1+4x_2 \leq 55}$ $\mathbf{12x_1+6x_2 \leq 72}$ ..... $\mathbf{2\ x_1+4x_2 \leq 20}$

شرط عدم السلبية: $\mathbf{x_1.x_2 \geq 0}$ ، **أي** أنه يجب أن تكون الكميات المنتجة من كل نوع من السلع موجبة(بمعنى أخر إما أن هناك إنتاج أو لا يوجد إنتاج).

مما سبق يمكن القول أن الصيغة الكلية للمشكلة هي كالتالي:

$$\text{Max } Zp= 25x_1+30x_2$$
$$\text{St : } 2x_1+4x_2 \leq 55$$
$$12x_1+6x_2 \leq 72$$
$$2x_1+4x_2 \leq 20$$
$$x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0$$

8

2/ إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين والتي تجعل الربح في أعظم قيمة له.

$$\text{Max } Zp = 25x_1+30x_2$$
$$\text{St}: 2x_1+4x_2 \le 55$$
$$12x_1+6x_2 \le 72$$
$$2x_1+4x_2 \le 20$$
$$x_2 \ge 0 \quad x_1 \ge 0$$

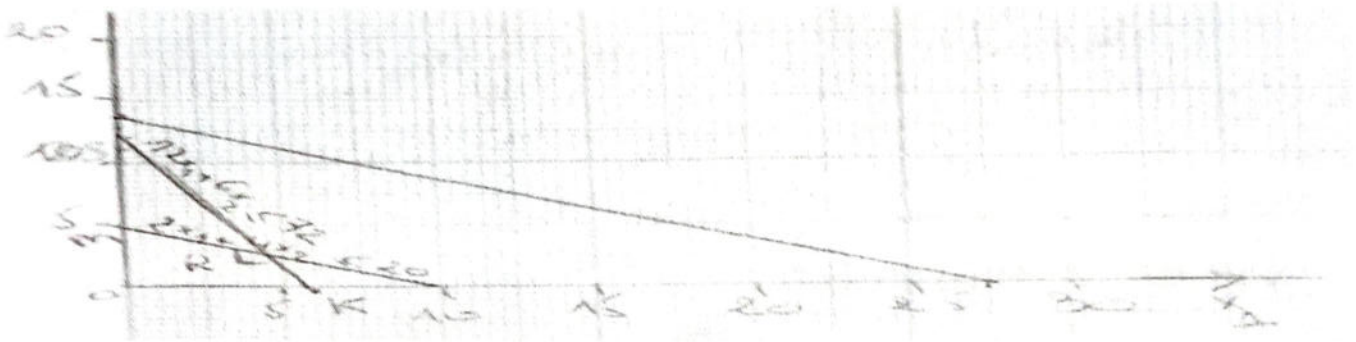
أ- تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$$2x_1+4x_2 = 55$$
$$12x_1+6x_2 = 72$$
$$2x_1+4x_2 = 20$$

ب- إيجاد نقاط التقاطع على المحور $x_1.x_2$

$2x_1+4x_2=20$			$12x_1+6x_2=72$			$2x_1+4x_2=55$		
	x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2
e	0	5	c	0	12	a	0	13.75
f	10	0	d	6	0	b	27.5	0

جـ تمثيل المعادلات بيانيا:



د- تحديد ركن الحل الامثل:

منطقة الحلول الممكنة ممثلة في النقاط (o.k.l.m) ونرمز لها بالرمز R، إن أي نقطة ضمنها تمثل حلا ممكنا للمشكلة، وهذا يعني أن هناك حلول ممكنة كثيرة لها. أما الحل الأفضل فإنه يتمثل في النقاط الثلاثة (k.l.m) وتستثنى النقطة (o) لأنها تمثل نقطة الأصل.

إن تحديد نقطة الحل الأمثل تتم بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة تقييم كافة نقاط الركنية.
- طريقة رسم دالة الهدف.

هـ- تقييم كافة نقاط الركنية .o.k.l.m:

التقاطع	الربح (بالدينار)	الإحداثيات	النقاط الركنية
نقطة الأصل	0	(0.0)	O
تقاطع القيد (2) مع المحور x_1	150	(6.0)	k
تقاطع القيدين (2) و (3)	196.66	(14/3 . 8/3)	l
تقاطع القيد (3) مع المحور x_2	150	(0.5)	m

من خلال تقييم الأركان (o.k.l.m) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أكبر قيمة هي:

Max ZpL= 25(14/3)+30(8/3)=196.66da

تقع عند النقطة L ذات الإحداثيات (10/3. 4/3)

و- اتخاذ القرار:

إن أحسن خطة إنتاجية تمكن المصنع من تحقيق أعظم ربح له في ظل الموارد المتاحة لديها هي: إنتاج 14/3 ألة حاسبة تجارية و8/3 ألة حاسبة علمية ليحقق ربح قدره196.66 دينار.

3/ تحدد الطاقات غير المستغلة من كل قسم.

القيد الأول والخاص بقسم التسليك: $2x_1+4x_2 \le 55$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل (x_2= 8/3، x_1=14/3) نجد:

$$2(14/3)+4(8/3) = 55-\Delta_1 \Leftarrow 20 = 55-\Delta_1 \Leftarrow \Delta_1 = 35$$

وعليه فإن الطاقات غير المستغلة في قسم التسليك تتمثل في 35 ساعة عمل ، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد متوفرا.

القيد الثاني والخاص بقسم التجميع: $12x_1+6x_2 \le 72$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل (x_2= 8/3، x_1=14/3) نجد:

$$12(14/3)+6(8/3) = 72-\Delta_2 \Leftarrow 72 = 72-\Delta_2 \Leftarrow \Delta_2 = 0$$

وعليه قسم التجميع يستغل جميع طاقاته، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد نادرا.

القيد الثالث والخاص بقسم الاختبار: $2x_1+4x_2 \le 20$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل (x_2= 8/3، x_1=14/3) نجد:

$$2(14/3)+4(8/3) = 20-\Delta_3 \Leftarrow 20 = 20-\Delta_3 \Leftarrow \Delta_3 = 0$$

وعليه قسم الاختبار يستغل جميع طاقاته، بمعنى أخر فان هذا القيد يعد نادرا.

التمرين الخامس:

قامت مؤسسة حليب الحضنة بالاستعانة بمكتب للدراسات والأبحاث من أجل وضع خطة إنتاجية لإنتاج منتجين جديدين هما: الجبن الأبيض والأحمر؛ المكتب مقيد بمجموعة من القيود، المتمثلة في:

✓ ساعات العمل المتاحة يوميا قدرت بـ 10 ساعات ؛ حيث يتطلب الجبن الأبيض ساعة عمل واحدة للوحدة المنتجة الواحدة؛ ويتطلب الجبن الأحمر 1/2 ساعة عمل للوحدة المنتجة الواحدة.

✓ المادة الأولية أ محددة بـ 12 وحدة كل منتج يستعمل وحدة واحدة منها لإنتاج وحدة واحدة.

✓ المادة الأولية ب المتاحة تتمثل في 18 وحدة، بحيث يتطلب الجبن الأبيض وحدة واحدة للوحدة المنتجة الواحدة؛ ويتطلب الجبن الأحمر 3/2 وحدة للوحدة المنتجة الواحدة.

إذا كانت المؤسسة تحقق هامش ربح قدره 2 وحدة نقدية لكل وحدة منتجة من الجبن الأبيض، و4 وحدات نقدية لكل وحدة منتجة من الجبن الأحمر.

المطلوب:

1- إذا كنت صاحب هذه المؤسسة ما هي الخطة المثلى التي يمكن العمل بها؟

2- ما هي الموارد التي تظهر عائقا أمام توسع حجم الإنتاج؟

الحل:

أولا: إيجاد الخطة المثلى التي من شأنها تعظيم أرباح المؤسسة.

1/ صياغة البرنامج الخطي:

X_1: الوحدات المنتجة من الجبن الأبيض. X_2 : الوحدات المنتجة من الجبن الأحمر.

ربح المحقق من بيع وحدة واحدة من الجبن الأبيض هو : 2 ون

ربح المحقق من بيع وحدة واحدة من الجبن الأحمر هو: 4 دج

وعليه فإن دالة الهدف (تعظيم الأرباح) سوف تكون على النحو التالي: $\mathbf{Max\ Zp= 2x_1+4x_2}$

إنتاج الجبن بنوعيه يحتاج إلى المادة الأولية أ والمادة الأولية ب بالإضافة إلى اليد العاملة :

المادة الأولية أ: المتاح منها هو 12 وحدة في اليوم، إنتاج وحدة واحدة من الجبن الأبيض أو الأحمر يحتاج إلى وحدة واحدة من المادة الاولية أ.

المادة الأولية ب: المتاح منها هو 18 وحدة في اليوم، إنتاج وحدة واحدة من الجبن الأبيض يحتاج إلى وحدة واحدة من المادة الأولية ب،في حين يحتاج إنتاج وحدة واحدة من الجبن الأحمر إلى وحدة ونصف من المادة الأولية ب.

اليد العاملة:و ممثلة في 10 ساعات عمل. إنتاج وحدة واحدة من الجبن الأبيض يحتاج إلى ساعة عمل، في حين يحتاج إنتاج وحدة واحدة من الجبن الأحمر إلى نصف ساعة عمل.

وعليه فإن القيود التقنية (الطاقة التشغيلية للأقسام): $x_1+x_2 \leq 12$ $x_1+1/2x_2 \leq .10$.....$x_1+3/2x_2 \leq 18$

شرط عدم السلبية: $x_1.x_2 \geq 0$ ، اي أنه يجب أن تكون الكميات المنتجة من كل نوع من السلع موجبة(بمعنى أخر إما أن هناك إنتاج أو لا يوجد إنتاج).

مما سبق يمكن القول أن الصيغة الكلية للمشكلة هي كالتالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Zp= 2x_1+4x_2 \\ &\text{St}: x_1+x_2 \leq 12 \\ &\quad x_1+3/2x_2 \leq 18 \\ &\quad x_1+1/2x_2 \leq 10 \\ &\quad x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

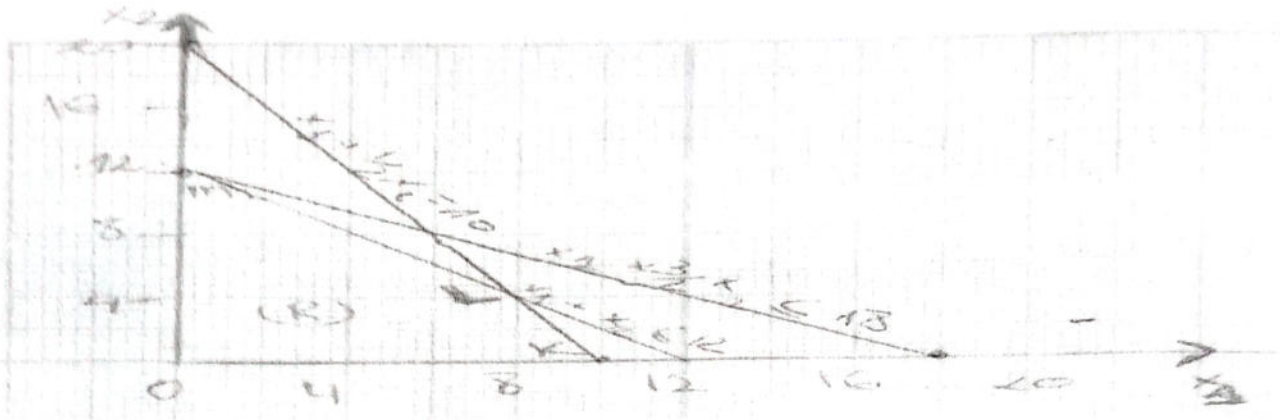
2/ تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$x_1+x_2 = 12$
$x_1+3/2x_2 = 18$
$x_1+1/2x_2 = 10$

3/ إيجاد نقاط التقاطع على المحور $x_1.x_2$

$x_1+x_2=12$			$x_1+3/2x_2 = 18$			$x_1+1/2x_2 = 10$		
	x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2
e	0	12	c	0	12	a	0	20
f	12	0	d	18	0	b	10	0

4/ تمثيل المعادلات بيانيا:



5/ تحديد ركن الحل الامثل:

منطقة الحلول الممكنة ممثلة في النقاط (o.k.l.m) ونرمز لها بالرمز R، إن أي نقطة ضمنها تمثل حلا ممكنا للمشكلة، وهذا يعني أن هناك حلول ممكنة كثيرة لها. أما الحل الأفضل فإنه يتمثل في النقاط الثلاثة (k.l.m) وتستثنى النقطة (o) لأنها تمثل نقطة الأصل.

إن تحديد نقطة الحل الأمثل تتم بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة تقييم كافة نقاط الركنية.
- طريقة رسم دالة الهدف.

تقييم كافة نقاط الركنية .o.k.l.m:

التقاطع	الربح (بالدينار)	الإحدثيات	النقاط الركنية
نقطة الأصل	0	(0.0)	O
تقاطع القيد (3) مع المحور x_1	20	(10.0)	k
تقاطع القيدين (1) و (3)	32	(8 . 4)	l
تقاطع القيد (1) مع المحور x_2	48	(0.12)	m

من خلال تقييم الأركان (o.k.l.m) المشكلة لمنطقة الحلول الممكنة يتضح أن أكبر قيمة هي:

Max ZpL= 2(0)+4(12)=48

تقع عند النقطة m ذات الإحداثيات (0. 12)

6/ اتخاذ القرار:

إن أحسن قرار إنتاجي يمكن أن تتخذه مؤسسة الحضنة فيما يخص إنتاج الجبن بنوعيه وذلك بناءا على مكتب الدراسات الذي استعنت به هو في إنتاج 12 وحدة من الجبن الأحمر فقط يوميا، لتحقق ربحا قدره 48 وحدة نقدية .

ثانيا: تحديد الموارد التي تظهر عائقا أمام توسع حجم الإنتاج (الموارد النادرة).

القيد الأول والخاص بالمادة الأولية أ $x_1+x_2 \leq 12$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_1=0$ ، $x_2=12$) نجد:

$$0+12 = 12+\Delta_1 \Leftarrow 12 = 12+\Delta_1 \Leftarrow 0=\Delta_1$$

وعليه فان هذا القيد يعد نادرا؛ إذن هو يقف أمام توسع حجم الإنتاج (في حالة توسيع الإنتاج على المؤسسة زيادة الكمية المتاحة من المادة الأولية أ).

القيد الثاني والخاص بالمادة الأولية ب: $x_1+3/2x_2 \leq 18$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_1=0$ ، $x_2=12$) نجد:

$$0+3/2(12) = 18+\Delta_2 \Leftarrow 18 = 18+\Delta_2 \Leftarrow 18=\Delta_2$$

و عليه فان هذا القيد يعد نادرا؛ إذن هو يقف أمام توسع حجم الإنتاج (في حالة توسيع الإنتاج على المؤسسة زيادة الكمية المتاحة من المادة الأولية ب).

القيد الثالث والخاص بساعات العمل: $x_1+1/2x_2 \leq 10$ وبتعويض إحداثيات الحل الأمثل ($x_1=0$ ، $x_2=12$) نجد:

$$0+1/2(12) = 10+\Delta_3 \Leftarrow 6 = 10+\Delta_3 \Leftarrow -4=\Delta_3$$

و عليه فان هذا القيد يعد متوفرا ولا يقف أمام توسع حجم الإنتاج .