(الجزء الأول)

طريقة السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية

التمرين الأول:

تنتج مؤسسة الحضنة للحليب ثلاثة أنواع من المنتجات هي: الحليب المجفف ، الياغورت الطبيعي ، الحليب

هامش الربح للمنتجات هو كالتالي: 210 دج ، 170 دج ، 40 دج (متناسب مع التسلسل السابق للمنتجات)

تمر المنتجات الثالثة بثلاثة أقسام إنتاجية هي: قسم التصفية، التصنيع والتعليب، وهذا حسب الجدول التالي الذي يوضح ساعات العمل المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من كل نوع من أنواع المنتجات الثلاثة:

القسم	عدد الساعات المطلوبة للوحدة الواحدة		
المنتج	التصفية	التصنيع	التعليب
الحليب المجفف	4	2	3/4
الياغورت الطبيعي	3	3	1
الحليب	1	1/2	1/2
الساعات المتاحة	390	360	200

المطلوب:

1- أوجد حجم الإنتاج الأمثل من المنتجات الثلاث.

2- حدد طبيعة الموارد ومجال التغير للموارد النادرة.

3- حدد مجال التغير لهامش الربح الخاص بالحليب المجفف.

الحل

1/ إيجاد حجم الإنتاج الأمثل من المنتجات الثلاث:

لنفترض أن:

X_1: يمثل منتوج الحليب المجفف.

X_2: يمثل منتوج الياغورت الطبيعي.

X_3: يمثل منتوج الحليب.

وعليه يمكن صياغة دالة الهدف (تعظيم) على النحو التالي:

$$MaxZp=210x_1+170x_2+40x_3$$

اما فيما يخص القيود:

القيد الأول الخاص بقسم التصفية فإن عدد ساعات المتاحة هي 390 ساعة تتوزع على المنتجات الثلاثة السابقة حسب الترتيب الموالي 4 ساعات لمنتوج الحليب المجفف و3ساعات للياغورت الطبيعي و ساعة واحدة للحليب. وعليه يمكن صياغة القيد الاول على النحو التالي: $4x_1+3x_2+x_3\leq390$

القيد الثاني الخاص بقسم التصنيع بالمؤسسة فغن عدد الساعات المتاحة به هي 360 ساعة تتوزع على المنتجات الثالثة السابقة حسب الترتيب الموالي ساعتين لمنتوج الحليب المجفف و ثلاث ساعات لمنتوج الياغورت الطبيعي ونصف ساعة للحليب وعليه يمكن صياغة القيد الثاني على النحو التالي: $2x_1+3x_2+1/2x_3\leq360$

القيد الثالث الخاص بقسم التعليب بالمؤسسة فإن عدد الساعات المتاحة به هي 200 ساعة تتوزع على المنتجات الثالثة السابقة حسب الترتيب الموالي 45 د للحليب المجفف وساعة لقسم الياغورت الطبيعي و نصف ساعة للحليب وعليه يمكن صياغة القيد الثالث على النحو التالي : $3/4x_1+x_2+1/2x_3\leq200$

مما سبق يمكن صياغة البرنامج الخطي للمسألة على النحو التالي:

$$MaxZp=210x_1+170x_2+40x_3$$

حيث:

$$4x_1+3x_2+x_3\leq390$$

$$2x_1+3x_2+1/2x_3\leq 360$$
$$3/4x_1+x_2+1/2x_3\leq 200$$
$$x_1.x_2.x_3\geq 0$$

1/ تحويل البرنامج الخطي إلى الصياغة المعيارية:

$$MaxZp=210x_1+170x_2+40x_3+0s_1+0s_2+0s_3$$

حيث:

$$4x_1+3x_2+x_3+s_1=390$$
$$2x_1+3x_2+1/2x_3+s_2=360$$
$$3/4x_1+x_2+1/2x_3+s_3=200$$
$$x_1.x_2.x_3.s_1.s_2.s_3\geq 0$$

عمود الأساس	سطر المتغيرات							
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T0	
S_1	4	3	1	1	0	0	390	390/4=97.5
S_2	2	3	½	0	1	0	360	360/2=180
S_3	¾	1	½	0	0	1	200	200×3/4=266.66
Zp	-210	-170	-40	0	0	0	0	

تحديد عدد المتغيرات غير الأساسية $(m-n)=6-3=3$

عدد جداول السمبلكس: $C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3\times2\times1\times3!}=20$

يجب عدم تجاوز 20 جدول أثناء بحثنا عن الحل الأمثل للبرنامج.

تحديد المتغير الداخل من خلال سطر دالة الهدف وتحديد أكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة و المتعلقة بالمتغير x_1

Zp	-210	-170	-40	0	0	0

المتغير الخارج عن طريق قسمة عناصر عمود الارتكاز على عناصر عمود الموارد

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T1	
x_1	1	3/4	¼	¼	0	0	97.5	97.5×4/3=130
S_2	0	3/2	0	-1/2	1	0	165	165×2/3=110
S_3	0	7/16	5/16	3/16	0	1	585/8	585/8×16/7=1170/7
Zp	0	-50/4	50/4	105/2	0	0	20475	

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T2
x_1	1	0	¼	½	-1/3	0	15
x_2	0	1	0	-1/3	2/3	0	110
S_3	0	0	5/16	1/3	7/24	1	25
Zp	0	0	50/4	145/3	25/3	0	21850

بالنظر إلى الجدول أعلاه فإننا وصلنا إلى الحل الأمثل (جميع عناصر السطر Zp أكبر من صفر وعمود الموارد موجب) وان أحسن طريقة لتعظيم أرباح مؤسسة الحضنة هي في إنتاج 15 علبة (وحدة) من الحليب المجفف و110 علبة من الياغورت الطبيعي لتحقيق أعظم ربح قدره 21850 دج.

2/ تحديد طبيعة الموارد ومجال التغير للموارد النادرة

أ/ تحديد طبيعة الموارد: من جدول الحل الأمثل يمكن القول أن:

القيد الأول قيد نادر لان المتغير الأساسي (S_1) خرج من عمود الأساس ليحل مكانه متغير غير أساسي هو X_1

القيد الثاني هو الأخر قيد نادر لان المتغير الأساسي (S_2) خرج من عمود الأساس ليحل مكانه متغير غير أساسي هو X_2

القيد الثالث قيد متوفر لان هناك 25 ساعة غير مستغلة فيه و يمكن التأكد من ذلك بتعويض إحداثيات الحل الأمثل في القيد الثالث.

ب/ تحديد مجال التغير للموارد النادرة:

بالنسبة للقيد الأول المتعلق بقسم التصفية :

$$1/2\Delta_1+15\geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq -30$$
$$-1/3\Delta_1+110\geq 0 \Rightarrow -\Delta_1 \geq -110 \Rightarrow \Delta_1\leq 330$$
$$1/3\Delta_1+25\geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq -75$$
$$145/3\Delta_1+21850\geq 0$$

وعليه مجال التغير محدود بين: $-30 \leq \Delta_1 \leq 330$

$390-30 \leq$ عدد ساعات المتاحة في قسم التصفية $\leq 390+330$

360 ساعة $\leq$ عدد ساعات المتاحة في قسم التصفية $\leq$ 720 ساعة

بالنسبة للقيد الثاني المتعلق بقسم التصنيع :

$$-1/3\Delta_2+15\geq 0 \Rightarrow -\Delta_2 \geq -45 \Rightarrow \Delta_2\leq 45$$
$$2/3\Delta_2+110\geq 0 \Rightarrow \Delta_2 \geq -165 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$7/24\Delta_2+25\geq 0 \Rightarrow \Delta_2 \geq -600/7$$
$$145/3\Delta_1+21850\geq 0$$

وعليه مجال التغير محدود بين: $600/7 \leq \Delta_2 \leq 45$

$360-600/7 \leq$ عدد ساعات المتاحة في قسم التصنيع $\leq 360+45$

1920/7 ساعة $\leq$ عدد ساعات المتاحة في قسم التصنيع $\leq$ 405 ساعة

3/ تحديد مجال التغير لهامش الربح الخاص بالحليب المجفف

$$145/3+1/2C_1\geq 0 \Rightarrow 1/2C_1 \geq -145/3 \Rightarrow C_1\leq -290/3$$
$$25/3-1/3C_1\geq 0 \Rightarrow -1/3C_1 \geq -25/3 \Rightarrow C_1\leq 25$$
$$0+0C_1\geq 0$$

وعليه مجال التغير محدود بين: $-290/3 \leq C_1 \leq 25$

$210-290/3 \leq$ هامش الربح الخاص بالحليب المجفف $\leq 210+25$

340/3 دج $\leq$ هامش الربح الخاص بالحليب المجفف $\leq$ 235 دج

التمرين الثاني: ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Zp = 3x_1+2x_2$$

St :

$$4x_1+3x_2\leq 12$$
$$4x_1+x_2\leq 8$$
$$4x_1-x_2\leq 8$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

المطلوب:

1/ أوجد الحل الأمثل للبرنامج بطريقتين.

2/ حدد طبيعة الموارد.

3/ حدد مجال التغير للمورد الأول الذي يبقي الحل الحالي حل عملي.

4/ حدد مجال التغير للمورد الثاني الذي يبقي الحل الحالي حل عملي.

5/ حدد مجال التغير لمعامل دالة الهدف الأول الذي يبقي الحل الحالي حل أمثل.

6/ في رأيك لماذا المورد الثالث لم يحدث له أي تغير في جدول الحل الأمثل.

الحـــــل

1/ إيجاد الحل بطريقتين:

الطريقة الأولى: التمثيل البياني

$\text{Max } Zp = 3x_1+2x_2$

St :

$4x_1+3x_2 \leq 12$

$4x_1+x_2 \leq 8$

$4x_1-x_2 \leq 8$

$x_1.x_2 \geq 0$

تحويل المتراجحات إلى معادلات:

$\text{Max } Zp = 3x_1+2x_2$

St :

$4x_1+3x_2=12$

$4x_1+x_2=8$

$4x_1-x_2=8$

$x_1.x_2 \geq 0$

ايجاد نقاط التقاط على المحور $(X_1.X_2)$:

$4x_1-x_2=8$			$4x_1+x_2=8$			$4x_1+3x_2=12$		
X_1	0	2	X_1	0	2	X_1	0	3
X_2	-8	0	X_2	8	0	X_2	4	0

التمثيل البياني للقيود:

من التمثيل البياني يتضح أن منطقة الحلول هي ABCD

تحديد ركن الحل الأمثل:

النقاط	تقاطع القيود	الإحداثيات	Zp
A		(0.0)	0
B	تقاطع القيد 2 مع المحور x_1	(2.0)	6
C	تقاطع القيد 1 مع المحور x_2	(0.4)	8

D	تقاطع القيد 1 و2	(3/2.4)	17/2

وعليه فإن النقطة C تمثل ركن الحل الأمثل.

الطريقة الثانية: هي طريقة السمبلكس

تحويل البرنامج إلى الصياغة المعيارية:

$$\text{Max } Zp = 3x_1+2x_2+0S1+0S2+0S3$$

St :

$$4x_1+3x_2+S1=12$$

$$4x_1+x_2+S2=8$$

$$4x_1-x_2+S3=8$$

$$x_1.x_2.S_1.S_2.S_3 \geq 0$$

نقل المعلومات إلى جدول السمبلكس:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS/T0	
S1	4	3	1	0	0	12	12/4=3
S_2	4	1	0	1	0	8	8/4=2
S_3	4	-1	0	0	1	8	8/4=2
Zp	-3	-2	0	0	0	0	

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS/T1	
S1	0	2	1	-1	0	4	4/2=2
X_1	1	¼	0	¼	0	2	2×4=8
S_3	0	-2	0	-1	1	0	0
Zp	0	-5/4	0	3/4	0	6	

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS/T2
X_2	0	1	½	-1/2	0	2
X_1	1	0	-1/8	3/8	0	3/2
S_3	0	0	1	-2	1	4
Zp	0	0	5/8	1/8	0	17/2

2/ تحديد طبيعة الموارد : بالنظر الى جدول الحل الأمثل يمكن القول أن القيدين الأول و الثاني لموردين نادرين في حين أن القيد الثالث يمثل موردا متوفرا حيث أن 4 وحدات منه غير مستغلة.

3/ تحديد مجال التغير للمورد الأول:

$$1/2\Delta_1+2\geq 0 \quad \Rightarrow \Delta_1 \geq -4$$

$$1/3\Delta_1+25\geq 0 \quad \Rightarrow -\Delta_1 \geq -12 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 \leq 12$$

$$\Delta_1+4\geq 0 \quad \Rightarrow \Delta_1 \geq -4$$

$$5/8\Delta_1+17/2\geq 0$$

وعليه مجال التغير محدود بين: $-4 \leq \Delta_1 \leq 12$

ما يعني أن: 24≥ المورد الأول ≥ 8

8=12-4 ≥ المورد الأول ≥12+12=24

4/ تحديد مجال التغير للمورد الثاني:

$-1/2\Delta_2+2\geq 0 \Rightarrow -\Delta_2 \geq -4 \Rightarrow \Delta_2\leq 4$

$3/8\Delta_2+3/2\geq 0 \Rightarrow \Delta_2 \geq -4$ ....

$-2\Delta_2+4\geq 0 \Rightarrow -\Delta_2 \geq -2 \Rightarrow \Delta_2\leq 2$

$145/3\Delta_1+21850\geq 0$

وعليه مجال التغير محدود بين: $-4 \leq \Delta_2 \leq 2$

ما يعني أن: $10\leq$ المورد الثاني ≤ 4

$10=8+2\leq$ المورد الثاني $\leq 8-4=4$

5/ تحديد مجال التغيير لمعامل دالة الهدف:

$5/8-1/8C_1\geq 0 \Rightarrow -C_1 \geq -1/5 \Rightarrow C_1\leq 1/5$

$1/8+3/8C_1\geq 0 \Rightarrow -C_1 \geq -1/3$ ... .

$0+0C_1\geq 0$ ....

وعليه مجال التغير محدود بين: $-1/3 \leq \Delta C_1\leq 1/5$

ما يعني أن: $3-1/3 \leq C_1 \leq 3+1/5$

$8/3 \leq C_1 \leq 16/5$

6/ لم يحدث أي تغير في المورد الثالث لأنه يمثل موردا متوفرا ولا يشارك في منطقة الحل الأمثل.

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل للبرنامجين الخطيين التاليين باستعمال طريقة السمبلكس ثم حدد طبيعة الموارد فيهما.

$$\text{Min } Z_p = 3x_1+20x_2+30x_3$$

s/c :

$$6x_1+3x_2-x_3\geq 20$$
$$2x_1-3x_2+x_3\geq 15$$
$$15x_1+12x_2+3x_3\geq 6$$
$$x_1\geq 0.\ x_2\geq 0\ .x_3\geq 0$$

$$\text{Min } Z_p = 30x_1+20x_2+10x_3$$

s/c :

$$4x_1+x_2-x_3\geq 10$$
$$2x_1-3x_2+x_3\geq 5$$
$$10x_1+3x_2+3x_3\geq 6$$
$$x_1\geq 0\ .\ x_2\geq 0\ .x_3\geq 0$$

الحــــــل

$$\text{Min } Z_p = 3x_1+20x_2+30x_3$$

s/c :

$$6x_1+3x_2-x_3\geq 20$$
$$2x_1-3x_2+x_3\geq 15$$
$$15x_1+12x_2+3x_3\geq 6$$
$$x_1\geq 0.\ x_2\geq 0\ .x_3\geq 0$$

الطريقة الأولى:

1/ تحويل البرنامج الخطي إلى الصياغة المعيارية:

$$\text{Min } Z_p = 3x_1+20x_2+30x_3+Ma_1+Ma_2+Ma_3$$

s/c :

$$6x_1+3x_2-x_3-s_1+a_1=20$$
$$2x_1-3x_2+x_3-s_2+a_2=15$$
$$15x_1+12x_2+3x_3-s_3+a_3=6$$
$$x_1.\ x_2\ .x_3.s_1.s_2.s_3.a_1.a_2.a_3\geq 0$$

إيجاد قيمة a وتعويض ما يساويها في دالة الهدف:

$$a_1=20-6x_1-3x_2+x_3+s_1$$
$$a_2=15-2x_1+3x_2-x_3+s_2$$
$$a_3=6-15x_1-12x_2-x_3+s_3$$
$$a=41-23x_1-12x_2-3x_3+s_1+s_2+s_3$$
$$\text{Min } Z_p = 3x_1+20x_2+30x_3+(a_1+a_2+a_3)M$$
$$\text{Min } Z_p = 3x_1+20x_2+30x_3+(41-23x_1-12x_2-3x_3+s_1+s_2+s_3)M$$

$$Min\ Zp=(3-23M)x_1+(20-12M)x_2+(30-3M)x_3+Ms_1+Ms_2+Ms_3+41M$$

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	RHS/T0	
a_1	6	3	-1	-1	0	0	1	0	0	20	20/6
a_2	2	-3	1	0	-1	0	0	1	0	15	15/2
a_3	15	12	3	0	0	-1	0	0	1	6	6/15
Zp	-3+23M	-20+12M	-10+3M	-M	-M	-M	0	0	0	41M	

الطريقة الثانية:

تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج المرافق له

$$Max\ Zp=20y_1+15y_2+6y_3$$

s/c :

$$6y_1+2y_2+15y_3\leq 3$$
$$3y_1-3y_2+12y_3\leq 20$$
$$-y_1+y_2+3y_3\leq 30$$
$$y_1 .\ y_2 .\ y_3\geq 0$$

تحويل البرنامج إلى الصياغة المعيارية:

$$Max\ Zp=20y_1+15y_2+6y_3+0s_1+0s_2+0s_3$$

s/c :

$$6y_1+2y_2+15y_3+s_1=3$$
$$3y_1-3y_2+12y_3+s_2=20$$
$$-y_1+y_2+3y_3+s_3=30$$
$$y_1 .\ y_2 .\ y_3 . s_1 . s_2 . s_3\geq 0$$

عمود الأساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T_0	
S_1	6	2	15	1	0	0	3	3/6=1/2
S_2	3	-3	12	0	1	0	20	20/3
S_3	-1	1	3	0	0	1	30	
Zp	-20	-15	-6	0	0	0	0	

عمود الأساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T_1	
y_1	1	1/3	5/2	1/6	0	0	1/2	1/2×3=3/2
S_2	0	-4	9/2	-1/2	1	0	37/2	
S_3	0	4/3	11/2	1/6	0	1	61/2	61/2×3/4=183/8
Zp	0	25/3	44	20/6	0	0	10	

عمود الأساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T_2
y_2	3	1	15/2	½	0	0	3/2
S_2	12	0	69/2	3/2	1	0	43/2
S_3	-4	0	-9/2	-1/2	0	1	57/2
Zp	25	0	213/2	15/2	0	0	45/2

$$Min\ Zp=30x_1+20x_2+10x_3$$

s/c :

$$4x_1+x_2-x_3\geq 10$$
$$2x_1-3x_2+x_3\geq 5$$
$$10x_1+3x_2+3x_3\geq 6$$
$$x_1 .\ x_2 .\ x_3\geq 0$$

الطريقة الثانية:

تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج المرافق له

$$\text{Max } Z_p = 10y_1 + 5y_2 + 6y_3$$

s/c :

$$4y_1 + 2y_2 + 10y_3 \leq 30$$
$$y_1 - 3y_2 + 3y_3 \leq 20$$
$$-y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 10$$
$$y_1 .\ y_2\ .y_3 \geq 0$$

تحويل البرنامج إلى الصياغة المعيارية:

$$\text{Max } Z_p = 10y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

s/c :

$$4y_1 + 2y_2 + 10y_3 + s_1 = 30$$
$$y_1 - 3y_2 + 3y_3 + s_2 = 20$$
$$-y_1 + y_2 + 3y_3 + s_3 = 10$$
$$y_1 .\ y_2\ .y_3 . s_1 . s_2 . s_3 \geq 0$$

عمود الأساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T_0	
S_1	4	2	10	1	0	0	20	20/5=4
S_2	1	-3	3	0	1	0	30	30/1=30
S_3	-1	1	3	0	0	1	10	
Zp	-10	-5	-6	0	0	0	0	

عمود الأساس	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	RHS/T_1
y_1	1	½	5/2	1/4	0	0	5
S_2	0	-7/2	½	-1/4	1	0	25
S_3	0	3/2	11/2	¼	0	1	15
Zp	0	0	19	5/2	0	0	50

"من قال لا أقدر قلت له حاول ومن قال لا أعرف قلت له تعلم ومن قال مستحيل قلت له جرب."