Chapitre 5

Stabilité des systèmes asservis linéaires

1.Introduction

La stabilité est la qualité la plus importante que doit posséder le système asservi. On ne peut en général se satisfaire de l'information binaire de la stabilité (stable/instable), en effet, un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme un système correct. La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

2.Définition de stabilité

Qu'il soit asservi ou non, un système est stable si à une variation bornée du signal d'entrée correspond une variation bornée du signal de sortie. Une variation d'un signal est dite bornée lorsqu'elle est constante en régime permanent.

Exemple

Les réponses indicielles des figures 5.1 et 5.2 correspondent à celles de systèmes stables et instable

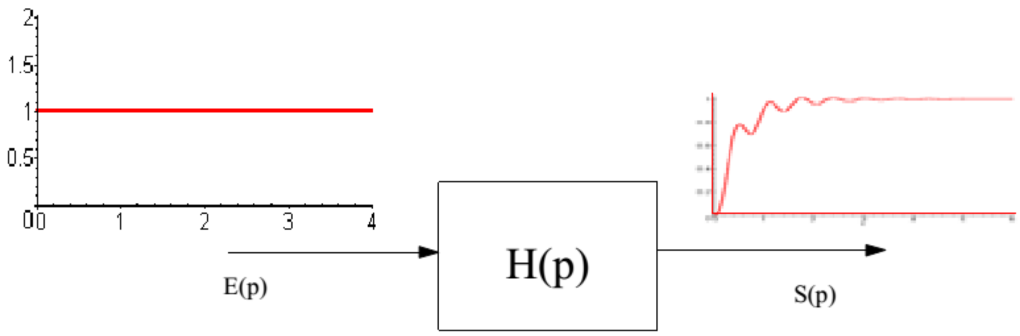

Figure 5.1. Réponse d'un système stable.

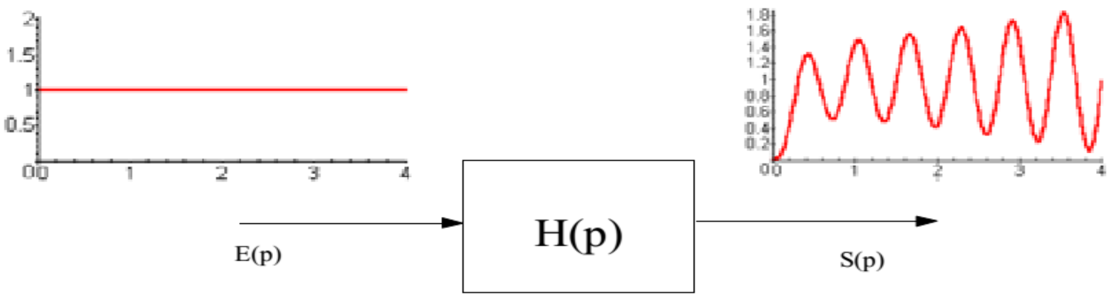

Figure 5.2. Réponse d'un système instable.

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

3.Critère mathématique de stabilité

Considérons un système asservi quelconque dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \tag{5.1}$$

Si on envoie sur l'entrée un échelon unité $E(p) = \frac{1}{p}$, alors :

$$S(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}\right) \tag{5.2}$$

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{C_1}{p - p_1} + \cdots + \frac{C_n}{p - p_n} \tag{5.3}$$

où les p_i sont les racines réelles ou complexes de $D(p)$.

Prenons, par exemple, le cas où le dénominateur contient des racines nulles (pôles multiples), des racines réelles (pôles réels) et des racines complexes. C'est-à-dire qu'il est de la forme :

$$\mathrm{D}(p) = p^{n_0}(p - p_1)\cdots(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{\mathrm{n}_1})\left[\left(p - \alpha_1\right)^2 + \omega_1^2\right]\cdots\left[\left(p - \alpha_{n_2}\right)^2 + \omega_{n_2}^2\right] \tag{5.4}$$

La décomposition de $S(p)$ en fractions rationnelles sera :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{A_i}{p^i} + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{B_k}{p - p_k} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{C_j p + D_j}{(p - \alpha_j)^2 + \omega_j} \tag{5.6}$$

Les racines complexes étant $\alpha_j \pm j\omega_j$ (α_j partie réelle, ω_j partie imaginaire), cherchons l'original $s(t)$ de $\mathrm{S(p)}$.

On trouve :

$$s(t) = \mathrm{A}_1 + \sum_{i=2}^{n_0} \frac{A_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=1}^{n_1} B_k \cdot e^{p_k t} + \sum_{j=1}^{n_2} F_j \cdot e^{\alpha_j t} \cdot \sin(\omega_j t + \phi_j) \tag{5.7}$$

On constate donc que la sortie garde une valeur finie quand $t \to \infty$, si les conditions suivantes sont remplies :

- Les p_k et les α_j doivent être négatifs pour que les exponentielles correspondantes soient décroissantes.
- Les A_i doivent être nuls sauf A_1 .

3.1. Conditions de stabilité

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système linéaire est stable si aucune des racines du dénominateur de sa fonction de transfert n'a de partie réelle positive.

Cela exclut :

- les racines réelles positives ;
- les racines complexes à parties réelles positives.

On peut formuler ceci autrement :

- un système asservi bouclé est stable si tous les pôles de la FTBF sont localisés dans le demi-plan gauche du plan complexe.
- un système asservi bouclé est instable si sa FTBF comprend, au moins, un pôle localisé dans le demi-plan droit du plan complexe et/ou des pôles de multiplicité > 1 sur l'axe imaginaire.
- si le système comprend une seule paire de pôle sur l'axe imaginaire ou un pôle unique à l'origine, le système est dit marginalement stable. Sa réponse sera oscillatoire non amortie ou oscillatoire à variation constante lorsque $t \to \infty$.

La figure 5.3 récapitule les cas possibles suivant le signe et la nature des racines.

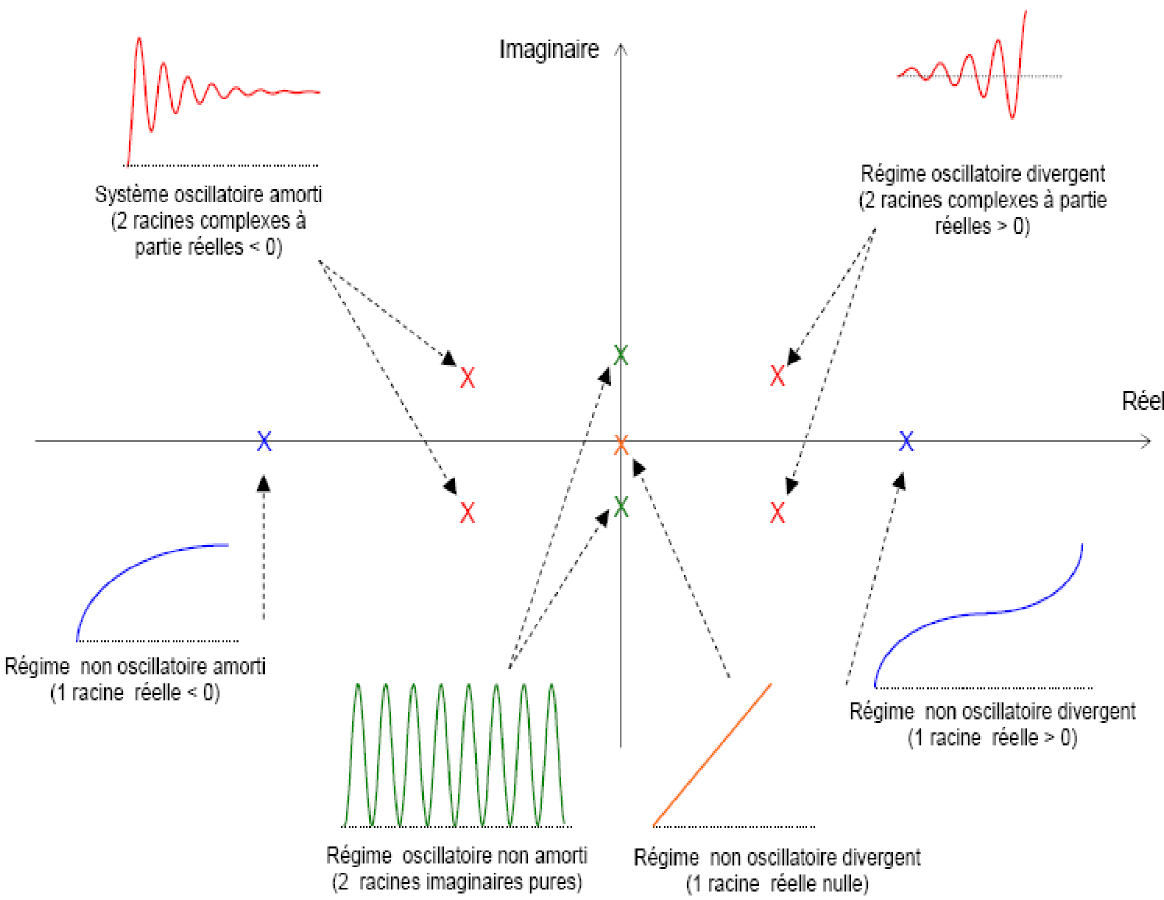

Figure 5.3. Récapitulatif des comportements des systèmes selon la position et le signe des pôles.

4. Critère algébrique de ROUTH

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée (Fig 5.4) et soit $D(p)$ le dénominateur de $H(p)$.

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{5.8}$$

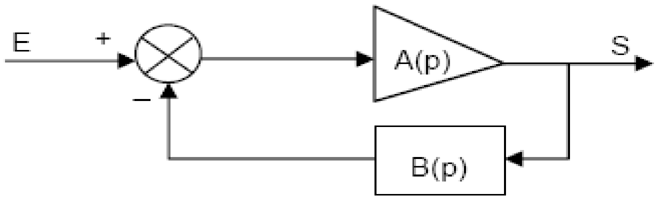

Figure 5.4. Schéma fonctionnel d'un système asservi bouclé.

4.1. Enoncé du critère

Soit $D(p)$ le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée. $D(p)$ peut être écrit sous la forme :

$$\text{D(p)} = 1 + A(p)B(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 p + a_0 \tag{5.9}$$

($D(p)$:Équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée)

- si l'un des coefficients a_i est nul, le système est instable.
- si tous les coefficients a_i sont différents de zéros, il suffit qu'il ne soient pas tous se même signe pour conclure à l'instabilité.
- si tous les coefficients a_i sont de même signe, l'examen de la première colonne du tableau de Routh permet de conclure à la stabilité du système.

Pour établir le tableau de Routh

Tableau 5.1. Tableau de Routh

Poser	p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
	p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
Calculer	p^{n-2}	A_1	A_2	A_3	
	p^{n-3}	B_1	B_2	B_3	
	$\cdots$				
	p^2	M_1	M_2		
	p^1	N_1	N_2		
	p^0	O_1			

avec :

$$A_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}},\ A_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}},\ A_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$B_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}}{A_1},\ B_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix}}{A_1},\ B_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ A_1 & A_4 \end{vmatrix}}{A_1}$$

$$O_1 = \frac{-\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ N_1 & N_2 \end{vmatrix}}{N_1}$$

Routh a établi que le système est stable si tous les termes de la première colonne sont de même signe. Dans le cas contraire, le nombre de changements de signe, donne le nombre de pôles instables.

Remarque : Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynôme D(p), autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

Exemple

Soit $G(p) = \frac{K}{p(p^2+p+3)}$ un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire (figure 5.5).

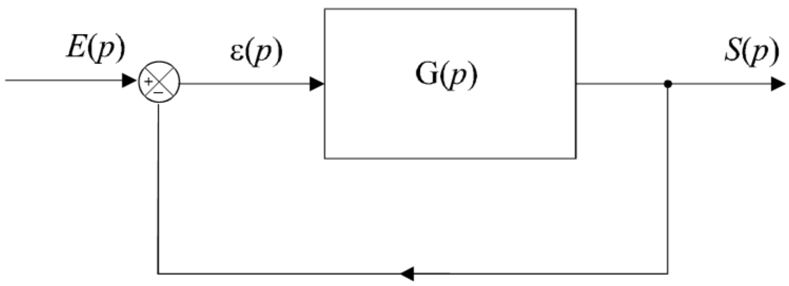

Figure 5.5. Schéma fonctionnel de l'exemple 2.

Calculons sa fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{p^3+p^2+3p+K} \quad (5.10)$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p^3 + p^2 + 3p + K \quad (5.11)$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

p^3 :	1	3
p^2 :	1	K
p^1 :	$3-K$	0
p^0 :	k	0

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que

$$\begin{cases} 3-K>0 \\ K>0 \end{cases}$$

Le système est donc stable si $0 < K < 3$.

Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, si :

- K < 0, il y a 1 seul changement de signe dans la 1ère colonne ; donc un seul pôle instable.
- K > 3, il y a 2 changements de signe dans la 1ère colonne ; donc 2 pôles instables.
- Si (K = 0 ou K = 3), (frontière entre la stabilité et l'instabilité) on dit que le système est oscillant (marginalement stable).

Exemple (ligne complète de zéros)

Nous avons dit que si une ligne complète était composée de zéro, la méthode était en défaut. En fait, il est quand même possible d'en tirer des conclusions moyennant certains aménagements.

Si

$$D(p) = p^5 + 7p^4 + 6p^3 + 42p^2 + 8p + 56 \tag{5.12}$$

Alors, le tableau de Routh est :

p^5 :	1	6	8	
p^4 :	7→1	42→6	56→8	Division de la ligne par 7
p^3 :	0	0		
p^2 :	-	-		
p^1 :	-			
p^0 :	-			

La 3ème ligne est nulle. On substitue alors à cette ligne les coefficients obtenus en différentiant une fonction fictive, appelée polynôme auxiliaire, construite sur la ligne précédant la ligne nulle. Le polynôme auxiliaire pour l'exemple en cours s'écrit :

$$Q(p) = p^4 + 6p^2 + 8 \tag{5.13}$$

Si nous le dérivons, par rapport à p, nous obtenons alors :

$$\frac{dQ(p)}{dp} = 4p^3 + 12p \tag{5.14}$$

Les coefficients de ce polynôme remplacement ceux de la ligne nulle dans le tableau initial. Le tableau devient alors :

p^5 :	1	6	8
p^4 :	1	6	8
p^3 :	$4 \rightarrow 1$	$12 \rightarrow 3$	
p^2 :	3	8	
p^1 :	1/3		
p^0 :	8		

Il n'y a aucun changement de signe sur la 1ère colonne du tableau, donc aucune racine à partie réelle positive. Le système est donc stable.

Exemple (un zéro sur la première colonne)

Si le premier élément de la ligne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro. Pour éviter cela, on utilise un nombre de valeur très faible ε (epsilon) pour remplacer le zéro de la première colonne. ε peut tendre vers zéro par valeur positive ou négative, pour permettre par la suite le calcul du nombre de changement de signe de la première colonne.

Considérons le système dont la FTBF

$$H(p) = \frac{10}{p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3} \tag{5.15}$$

Donc le dénominateur :

$$D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3 \tag{5.16}$$

Alors, le tableau de Routh est :

p^5 :	1	3	5
p^4 :	2	6	3
p^3 :	$0 \rightarrow \varepsilon$	7/2	
p^2 :	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	
p^1 :	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$		
p^0 :	3		

Considérons uniquement le changement de signe dans la première colonne et calculons le signe de chaque ligne dans les 2 cas ($\varepsilon = 0^+$ et $\varepsilon = 0^-$) :

	1ère colonne	$\varepsilon \to 0+$	$\varepsilon \to 0-$
p^5 :	1	+	+
p^4 :	2	+	+
p^3 :	$0 \to \varepsilon$	+	–
p^2 :	$\dfrac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	–	+
p^1 :	$\dfrac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	+	+
p^0 :	3	+	+

Si ε est choisi positif, il y a 2 changements de signe. S'il est choisi négatif, il y a également 2 changements de signe. Le système a donc 2 pôles dans le demi-plan droit du plan complexe (2 pôles instables) et ce n'est pas important si nous choisissons d'approcher le zéro par valeur positive ou négative. Ceci est toujours le cas.

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît.