Cours d'infographie

3ém année SI

Mr. Ghemougui Abdessatar

2016

Transformation géométriques en 2D

Transformations 2D

Nous représentons un point par un vecteur $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Si nous pouvons décrire les transformations d'un point nous pouvons décrire les transformations des autres primitives car ils sont généralement une collection de points.

les transformations de base sont :

- Translation
- Mise à l'échelle
- Rotation

Transformations 2D

Translation

la transformation du point P(x,y) par le translation T(dx,dy)

$$x^{/} = x + d_x$$

$$y^{/} = y + d_y$$

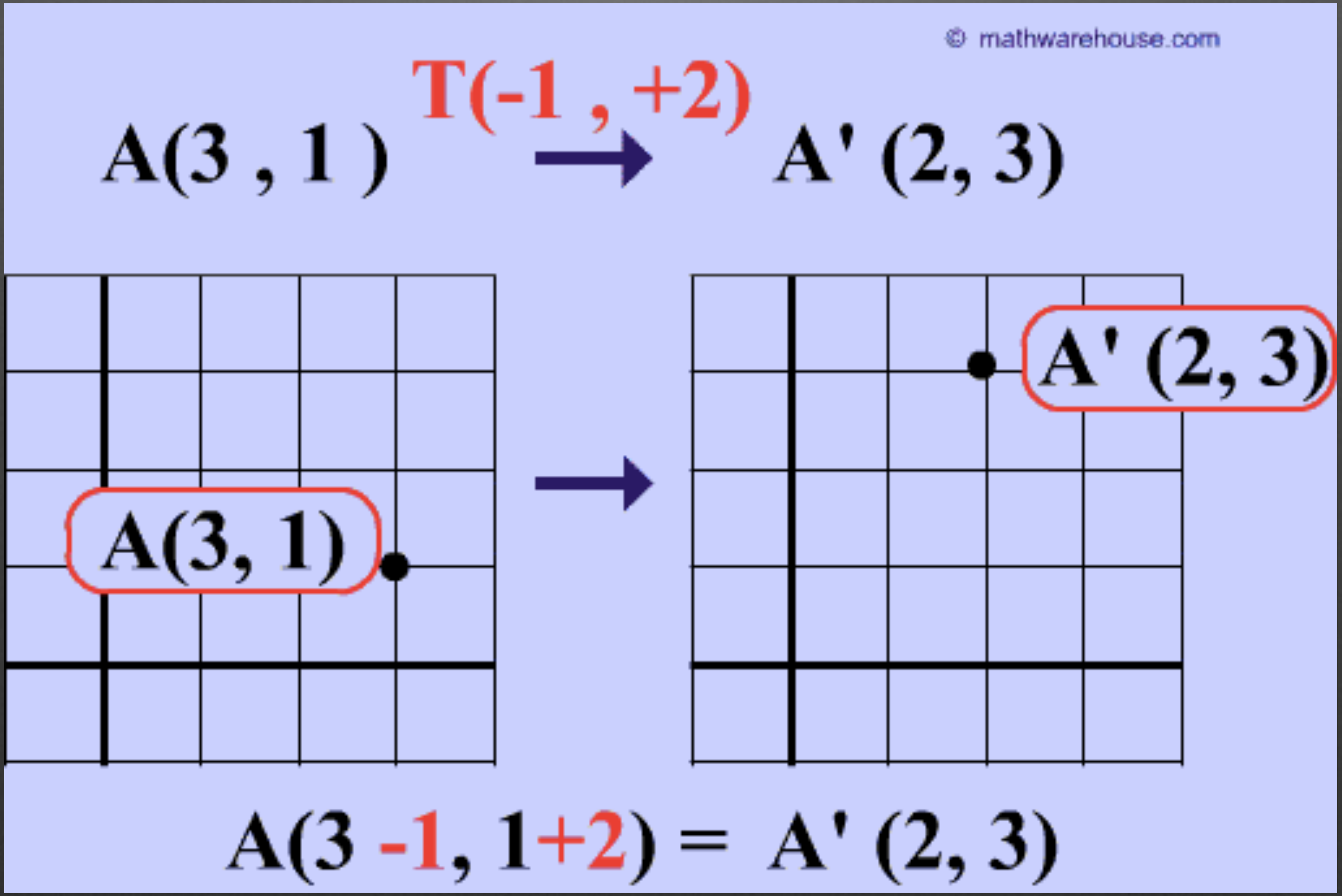
une translation peut être décrite par une simple somme de deux vecteurs

$$P^{/} = P + T$$

Transformations 2D

Translation

Example :

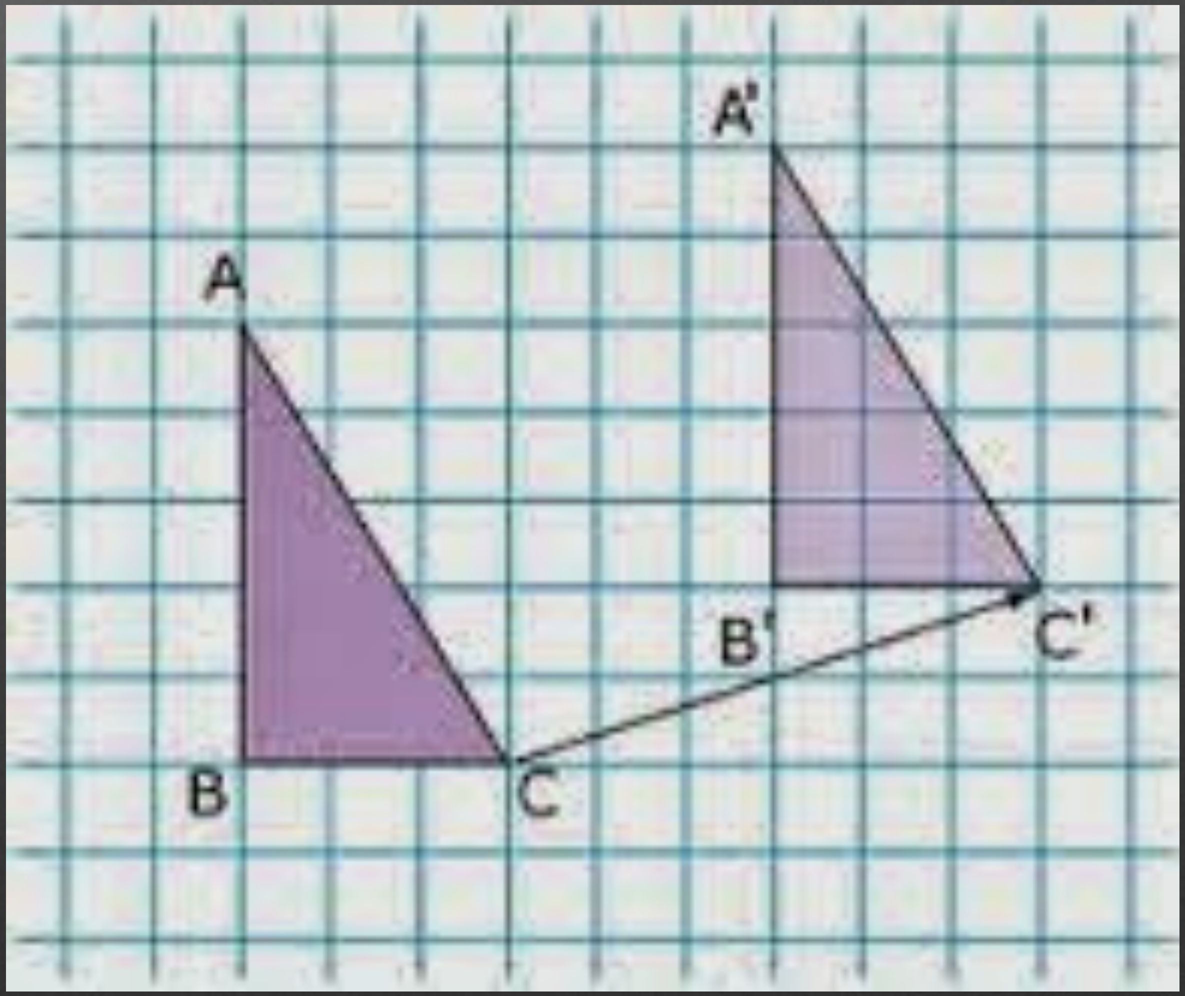


Transformations 2D
Translation

En transplantant tout les points d'un objet nous transplantons l'objet entier

Applications :

Déplacement des objetsdéplacement de la caméra

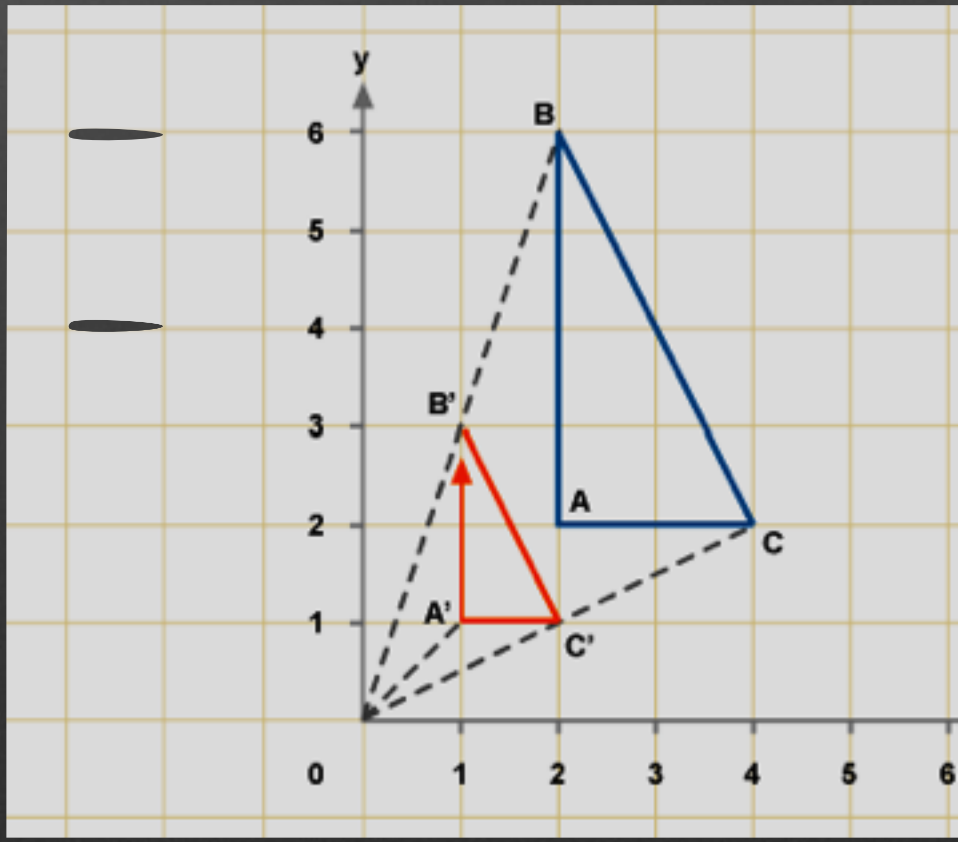


Transformations 2D
Mise à l'échelle
Scaling

Changer la taille des objets

$$x' = s_x . x$$
$$y' = s_y . y$$

Sx et Sy sont appelés les facteurs d'échelle.



Transformations 2D
Mise à l'échelle
Scaling

$$x' = s_x .x$$

$$y' = s_y .y$$

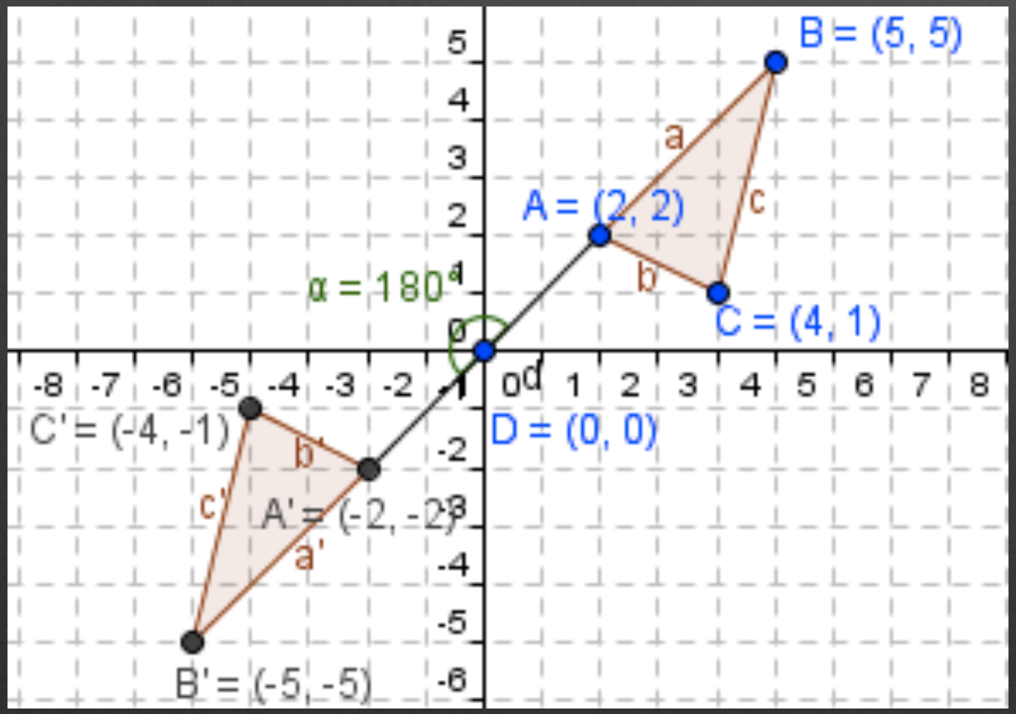
Si Sx = Sy on parle d'une mise à l'échelle uniforme
Si Sx = Sy >1 on parle d'un agrandissement
Si Sx = Sy >0 et <1 on parle d'une compression

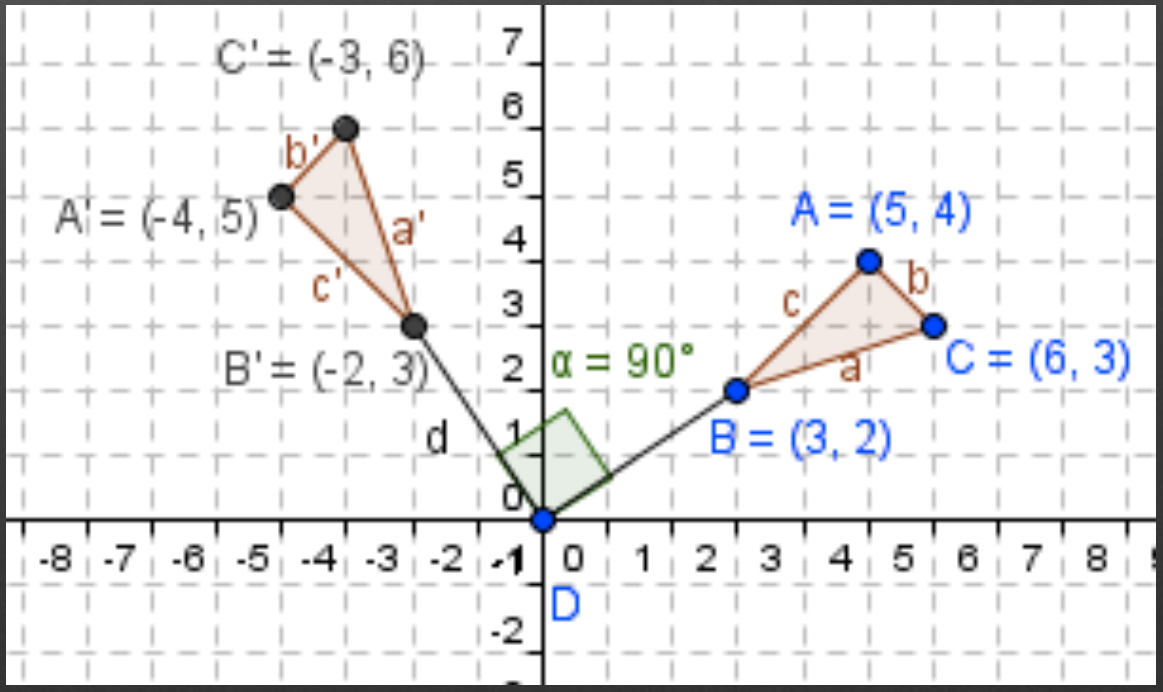
Transformations 2D
Rotation

La rotation d'un point P autour de l'origine O avec un angle s'exprime comme suivant :

$$x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$

$$y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$





Transformations 2D
Forme matricielle

$$[B]=[T][A]$$

A le point sur le quel on veut appliquer la transformation

T est la matrice de transformation

B est le résultat de la transformation

Transformations 2D
Forme matricielle

la forme générique d'une transformation est la suivante :

$$[B]=[T][A]$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + cy$$
$$y' = bx + dy$$

Si T est la matrice d'identité, l'objet ne change pas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = 1x + 0y$$
$$y' = 0x + 1y$$

Transformations 2D

Mise à l'échelle

forme générale

$$x' = ax + cy$$

$$y' = bx + dy$$

formule de mise à l'échelle

$$x' = s_x . x$$

$$y' = s_y . y$$

donc la forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformations 2D
Rotation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matrice de rotation est orthogonale, donc

$$\left[B\right]^T = \left[B\right]^{-1}$$

$$\left|B\right| = 1$$

Transformations 2D
Rotation

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$0,5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0,5$	0

Rotation de 90° $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rotation de 270° ou -90° $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rotation de 180° $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rotation de 0° ou de 360° $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformations 2D

Translation

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$

$$P' = P + T$$

Problème : une translation est une somme de deux vecteurs est ne peut pas être exprimée sous forme d'une multiplication de matrices

Comment représenter une translation sous la forme générique d'une multiplication de matrices ?

$$P' = P + T$$

$$[B] = [T][A]$$

La solution est d'utiliser les coordonnées homogènes

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Cordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xw \\ yw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cordonnées euclidienne

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

En cordonnées homogènes plusieurs cordonnées peuvent représenter le même point si il sont des multipliants les uns au autres.

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Cordonnées euclidienne

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Cordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ w/w \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cordonnées euclidienne

$$\begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$$

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Forme générique d'une transformation en cordonnées homogènes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + cy + t_x w$$
$$y' = bx + dy + t_y w$$

Coordonnés homogènes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + cy + t_x w$$
$$y' = bx + dy + t_y w$$

Pour w=1

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + cy + t_x$$
$$y' = bx + dy + t_y$$

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Pour la translation

$$x' = ax + cy + t_x$$
$$y' = bx + dy + t_y$$

$$x^{/} = x + d_x$$
$$y^{/} = y + d_y$$

$$\begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a=1 c=0
b-0 d=1
tx=dx
ty = dy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_y \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle de la translation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_y \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Pour la mise à l'échelle

$$x' = ax + cy + t_x$$
$$y' = bx + dy + t_y$$

$$x' = s_x . x$$
$$y' = s_y . y$$

$$\begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a=sx c=0
b-0 d=sy
tx=0 ty =0

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle de la mise à l'échelle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations 2D
Coordonnés homogènes

Pour la rotation

$$x' = ax + cy + t_x \qquad x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$
$$y' = bx + dy + t_y \qquad y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

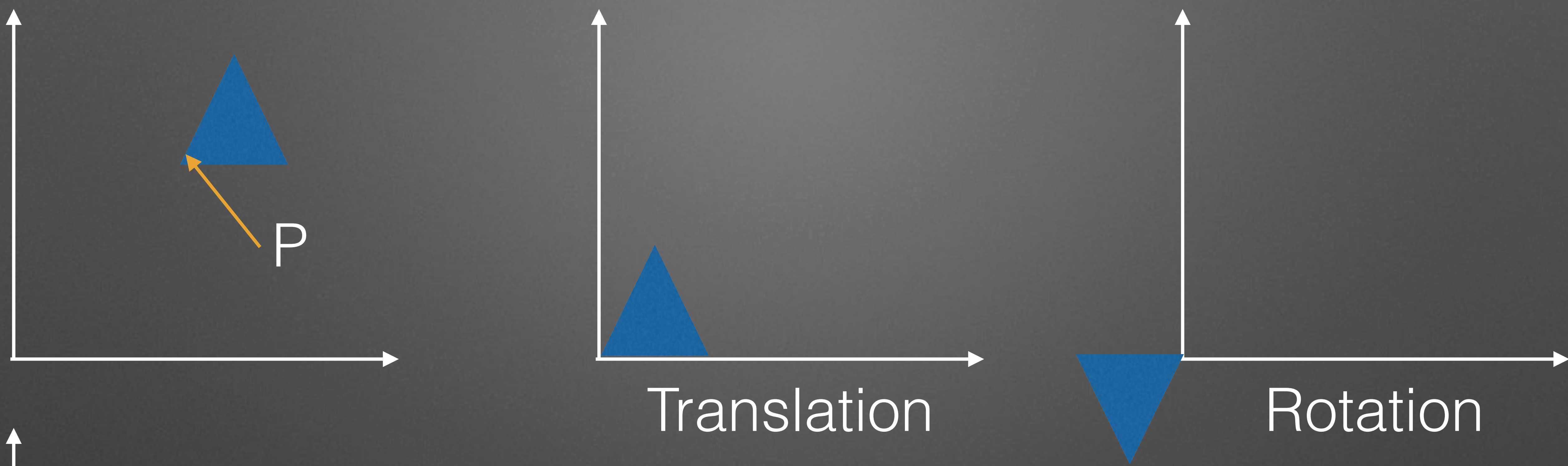
$$\begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a=cos c= -sin   tx=0
b-sin   d=cos   ty =0

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle de la rotation $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Transformations 2D
Rotation autour d’un point



La rotation se fait autour de l’origine,si on veut effectuer la rotation autour d’un point P la solution est de faire la rotation comme si le point P est l’origine voir (TD1)

Transformations 2D
Rotation autour d'un point

$$A_{total} = T(p_x, p_y) \cdot R(\theta) \cdot T(-p_x, -p_y)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & P_x(1-\cos\theta) + p_y \sin\ \theta \\ \sin\theta & \cos\theta & P_y(1-\cos\theta) - p_x \sin\ \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour d'un point (voir TD1)

Transformations 2D
Composition des transformations

Remarques :

- la multiplication des matrices n'est pas commutative donc l'ordre est important, la dernière transformation se place en premier dans la multiplication
- Parmi les transformation de base, les paires de transformations suivantes sont commutatives :
    - Rotation et Rotation
    - Translation et translation
    - mise à l'échelle et mise à l'échelle
    - Rotation et mise à l'échelle uniforme (sx=sy)