# Cours d'infographie

3ém année SI

Mr. Ghemougui Abdessatar

2016

# Transformations 2D
# Coordonnés homogènes

**Pour la rotation**

$$x' = ax + cy + t_x \qquad x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$$
$$y' = bx + dy + t_y \qquad y' = x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

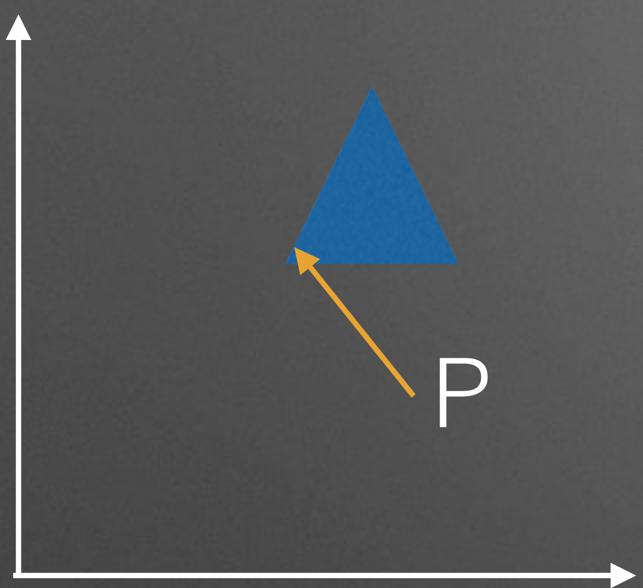
$$\begin{pmatrix} a & c & t_x \\ b & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

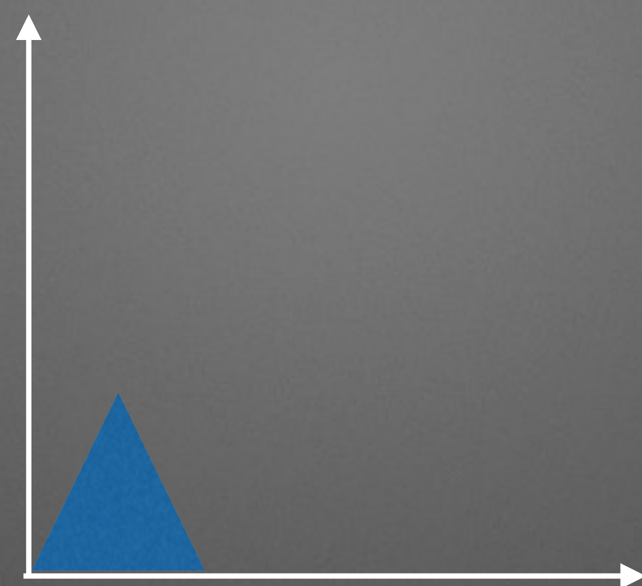
**a=cos c= -sin tx=0**
**b-sin d=cos ty =0**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

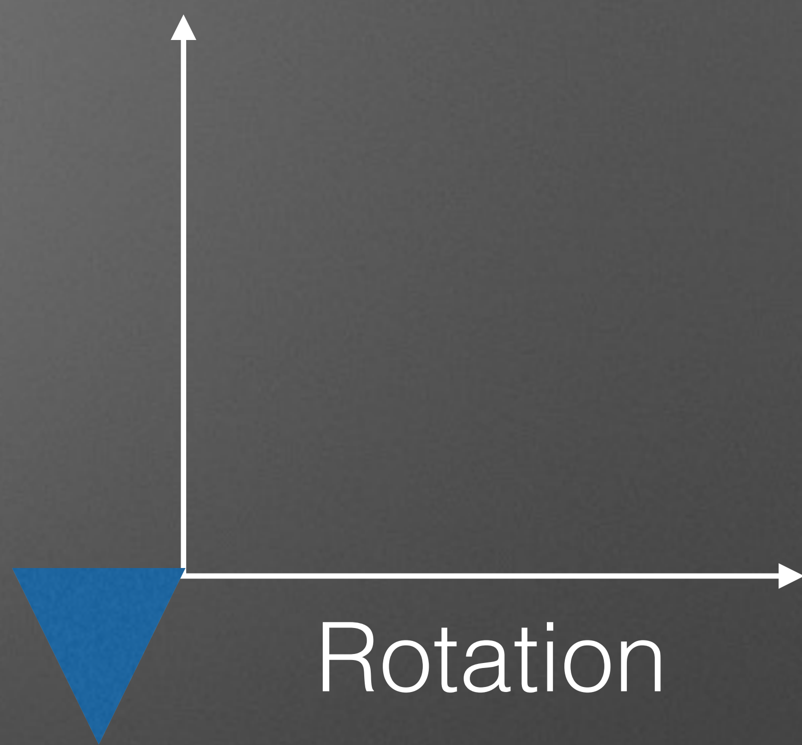
**Forme matricielle de la rotation** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

# Transformations 2D
# Rotation autour d'un point



Translation



Rotation

Translation

**La rotation se fait autour de l'origine,si on veut effectuer la rotation autour d'un point P la solution est de faire la rotation comme si le point P est l'origine voir (TD1)**

# Transformations 2D
# Rotation autour d'un point

$$A_{total} = T(p_x, p_y) \cdot R(\theta) \cdot T(-p_x, -p_y)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & P_x(1-\cos\theta) + p_y \sin\ \theta \\ \sin\theta & \cos\theta & P_y(1-\cos\theta) - p_x \sin\ \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Matrice de rotation autour d'un point (voir TD1)**

# Transformations 2D
# Composition des transformations

**Remarques :**

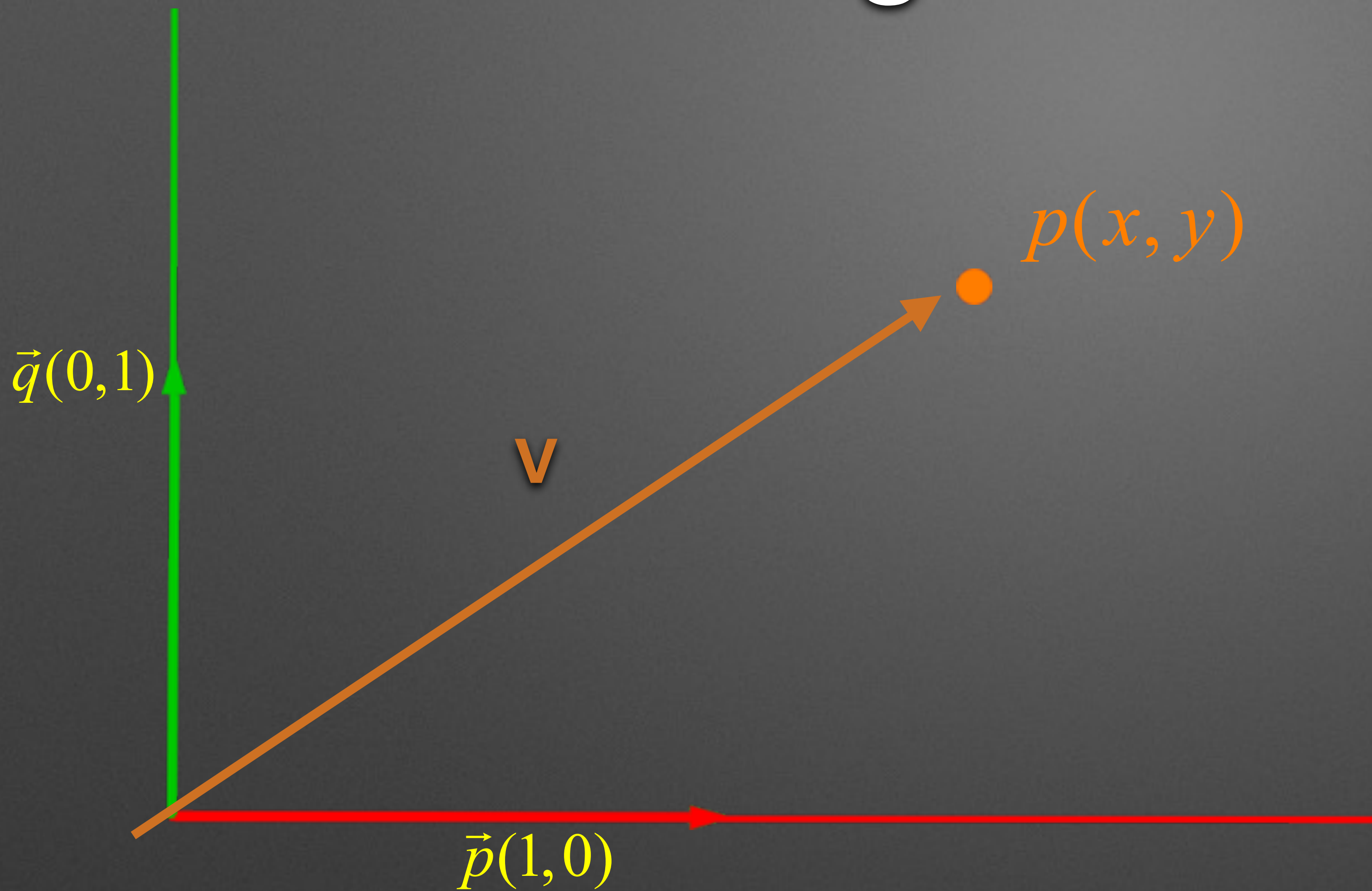
- la multiplication des matrices n'est pas commutative donc l'ordre est important, la dernière transformation se place en premier dans la multiplication
- Parmi les transformation de base, les paires de transformations suivantes sont commutatives :
    - Rotation et Rotation
    - Translation et translation
    - mise à l'échelle et mise à l'échelle
    - Rotation et  mise à l'échelle uniforme (sx=sy)

# Transformations 2D
# Changement de base

Nous avons interpréter une les transformations comme un **déplacement de l’objet par rapport à un système de coordonnée**

Mais nous pouvons voir une transformation comme un ***changement de système de coordonnée***

# Transformations 2D
# Changement de base

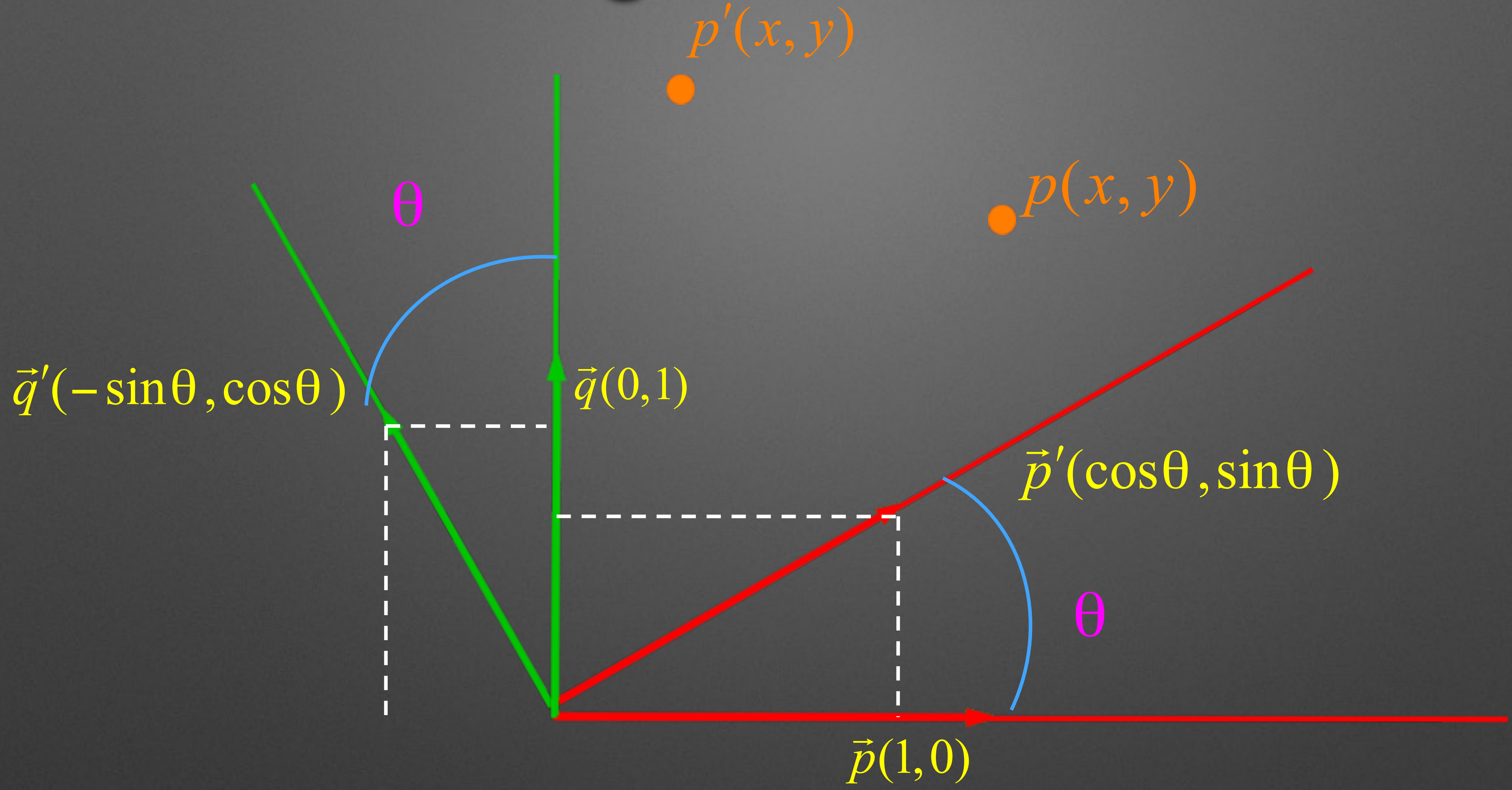



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \vec{p} & \vec{q} \end{array} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{v} = x.\vec{p} + y.\vec{q}$$

Le vecteur v est la combinaison linéaire des vecteurs p q

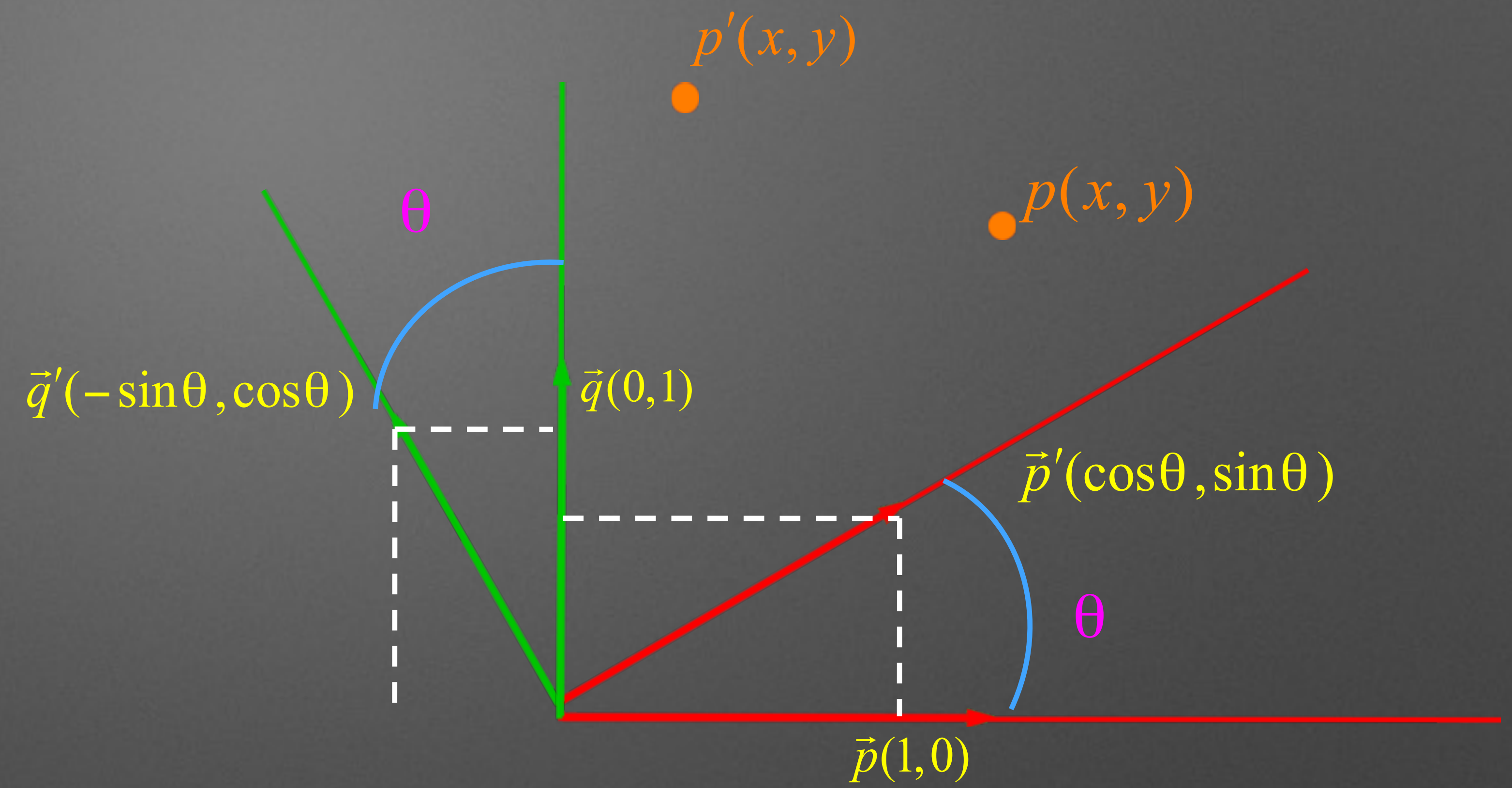
# Transformations 2D
# Changement de base




$$\vec{p}' = \cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}$$

$$\vec{q}' = -\sin\theta\,\vec{p} + \cos\theta\,\vec{q}$$

# Transformations 2D
# Changement de base




$$\vec{p}\,' = \cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}$$

$$\vec{q}\,' = -\sin\theta\,\vec{p} + \cos\theta\,\vec{q}$$

$$p' = x.\vec{p}\,' + y.\vec{q}\,'$$

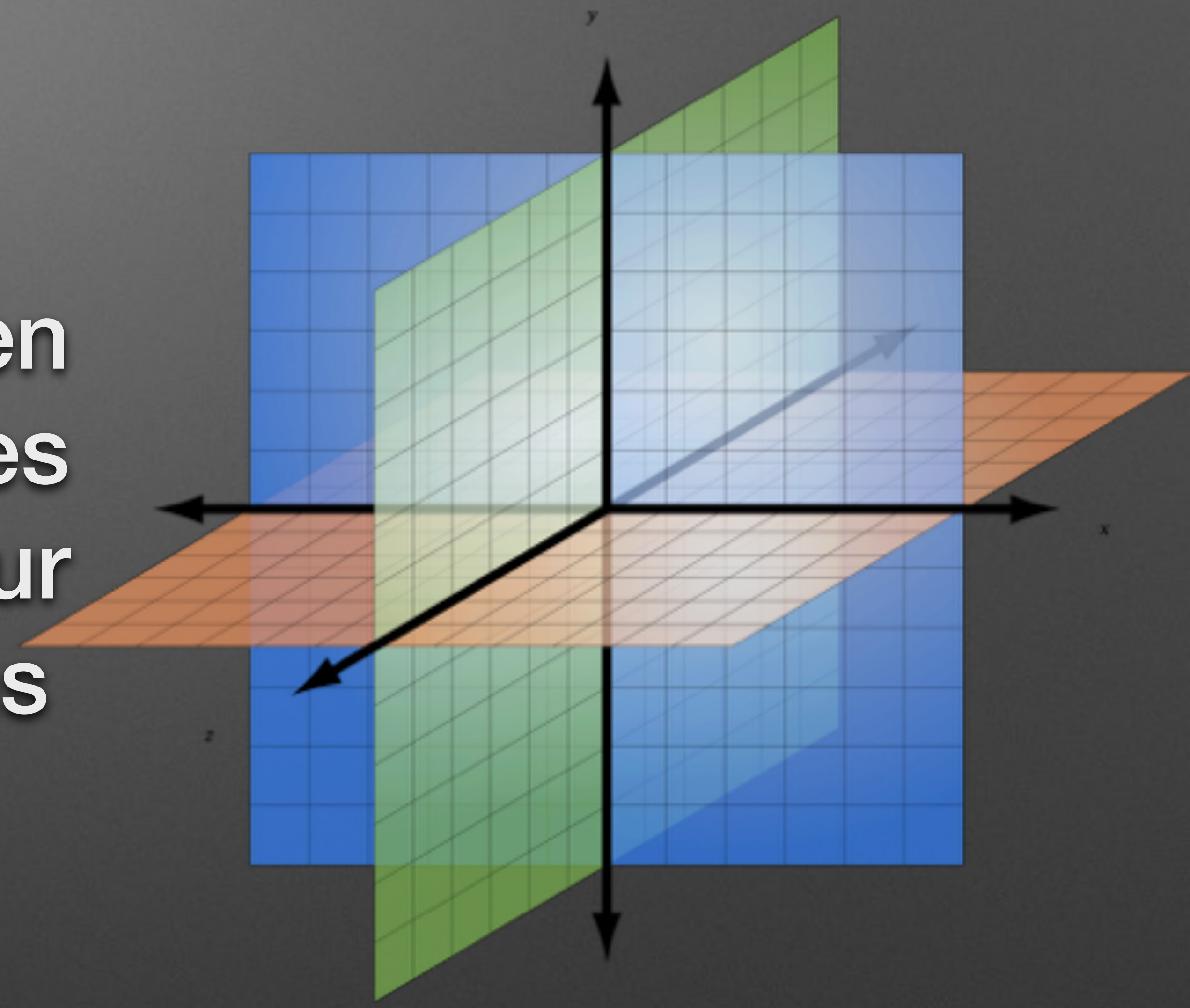
$$p' = x.(\cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}) + y.(-\sin\theta\,\vec{p} + \cos\theta\,\vec{q})$$

$$\begin{array}{ccc} & \vec{p}\,' \quad\quad \vec{q}\,' & \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta \\ -\sin\theta\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{matrix}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

# Transformation géométriques en 3D

# Système de coordonnées 3D

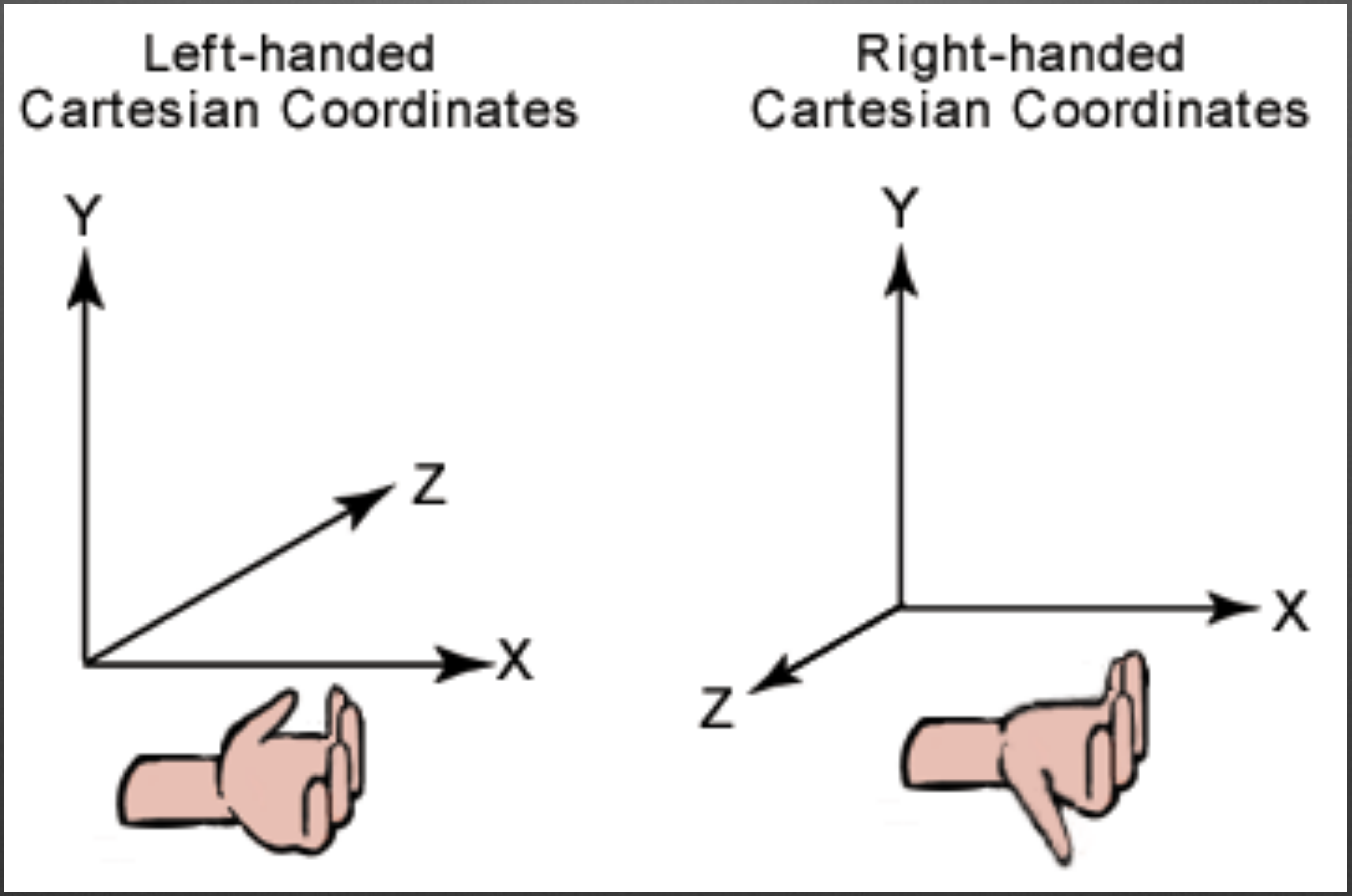
En 3D, un point est représenté par un vecteur à trois composants (x,y,z).



Pour les mêmes raisons qu'en 2D, nous allons utiliser les coordonnées homogènes pour représenter les transformations

Les coordonnées homogènes du point (x,y,z) sont (x,y,z,1)

# Système de coordonnées 3D



# Les Transformations en 3D

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Point 2D

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Point 3D

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & k & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

La forme générale d’une transformation en 3D

# Les Transformations en 3D
# Translation en 3D

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{d_x} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{d_y} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{d_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Les Transformations en 3D
# Mise à l'échelle en 3D

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(s, s, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{s}} \end{pmatrix}$$

**Mise à l'échelle uniforme**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

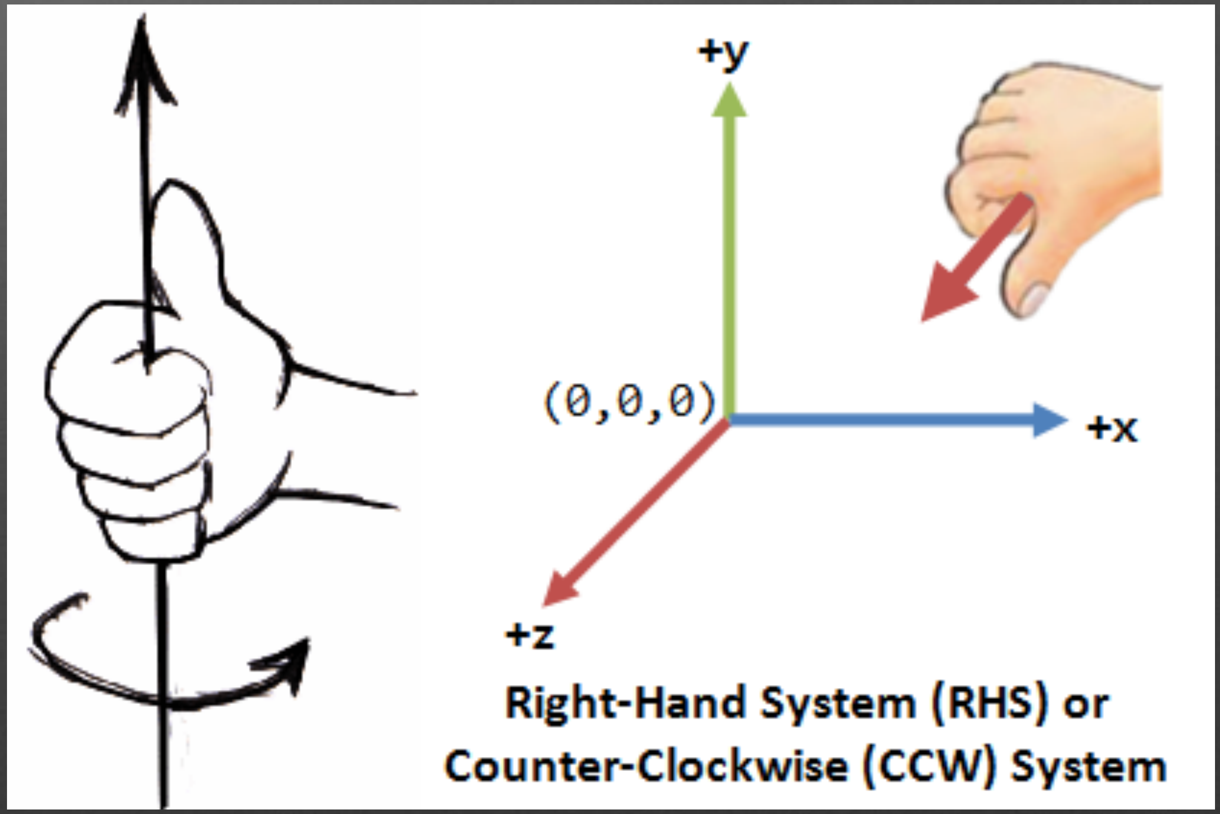
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x/\frac{1}{2} \\ y/\frac{1}{2} \\ z/\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}/\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Les Transformations en 3D
# Rotation en 3D

En 3D la rotation se fait selon un axe est pas un point

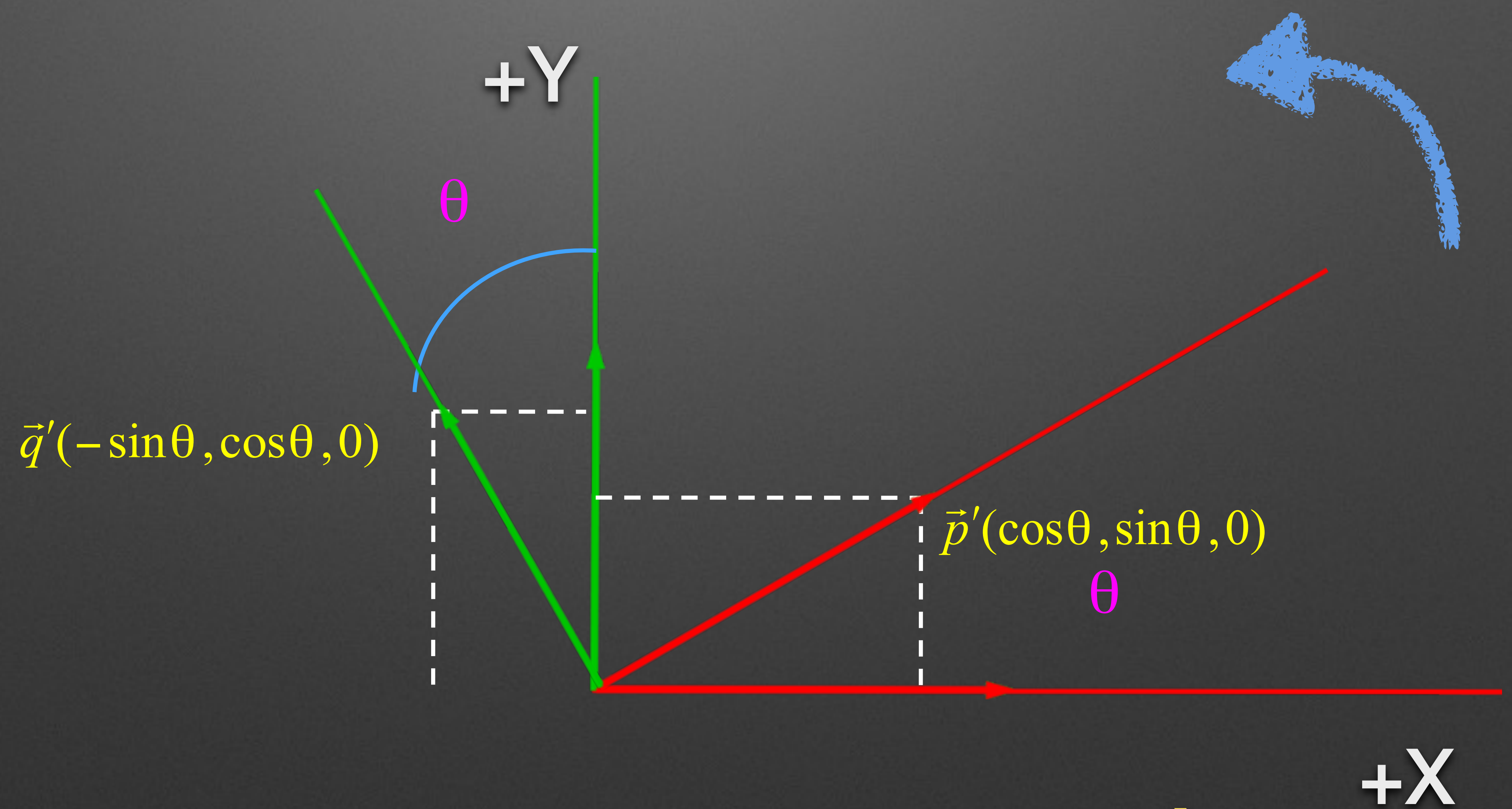
Le sense de la rotation se fait selon la règle de main droite au la main gauche

La rotation selon un axe principal, se fait sur le plan perpendiculaire sur cet axe et seules le coordonnés des autres axes sont affectées par la rotation



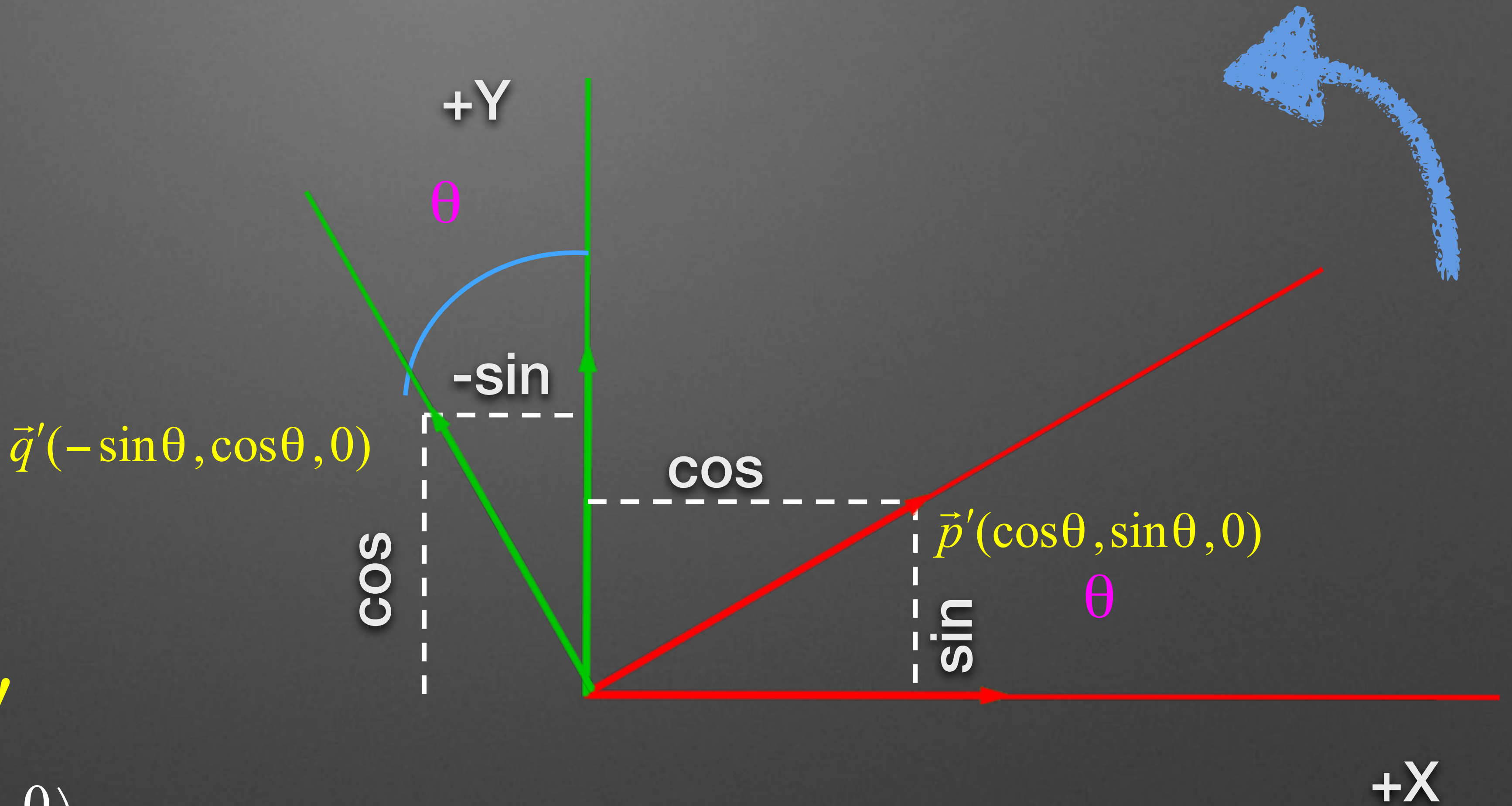
# Les Transformations en 3D
# Rotation en 3D autour du Z

La rotation sur l'axe Z se fait sur le plan XY
Le sens de rotation et de X positif vers le Y  positif




**La rotation autour de l'axe Z est identique à la rotation autour de l'origine en 2D**

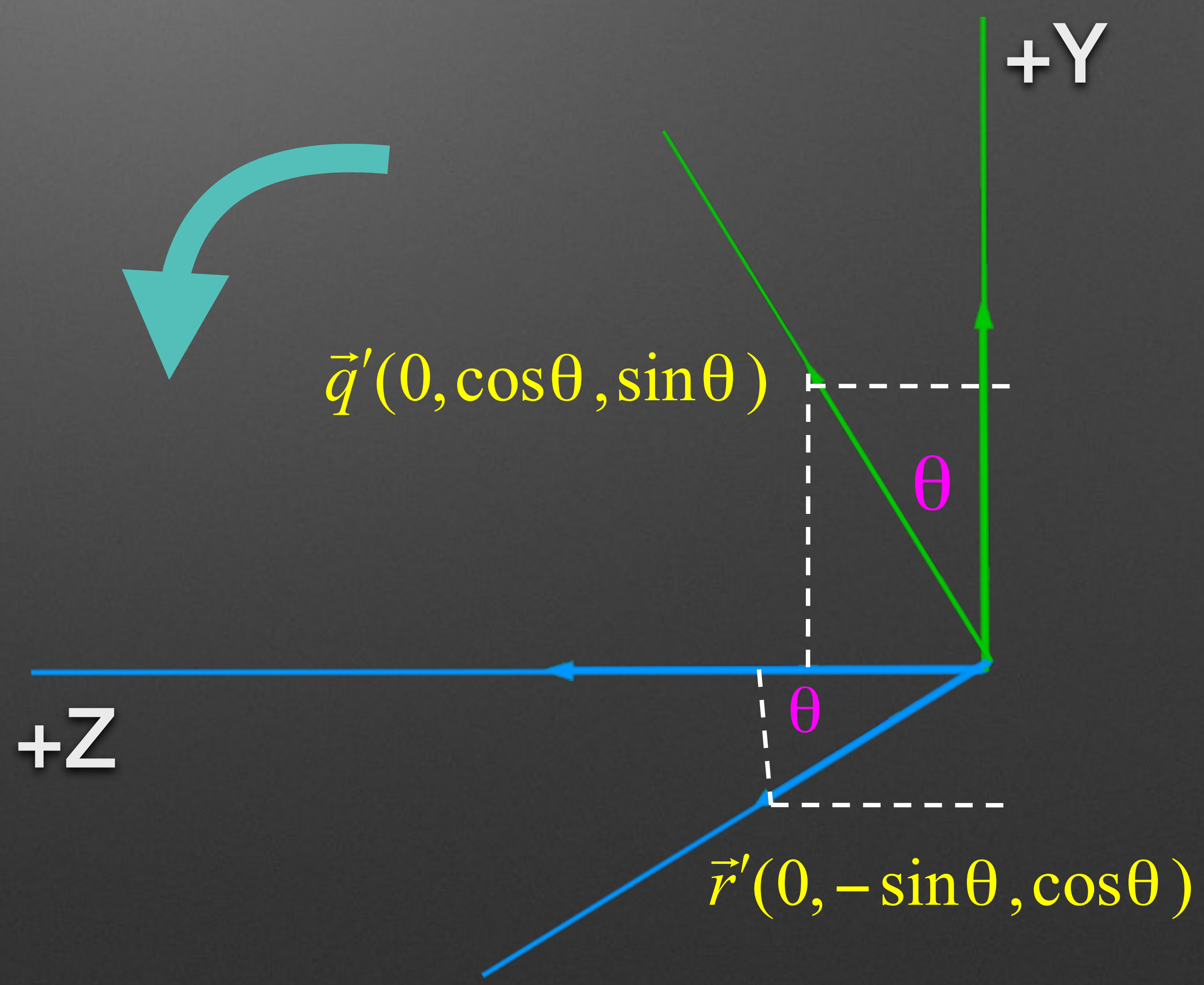
# Les Transformations en 3D
# Rotation en 3D autour du Z




$$
\begin{array}{c}
\quad\quad\quad \begin{array}{cccc} \vec{p}' & \vec{q}' & \vec{r}' & \end{array} \\
R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Les Transformations en 3D
# Rotation en 3D autour du X

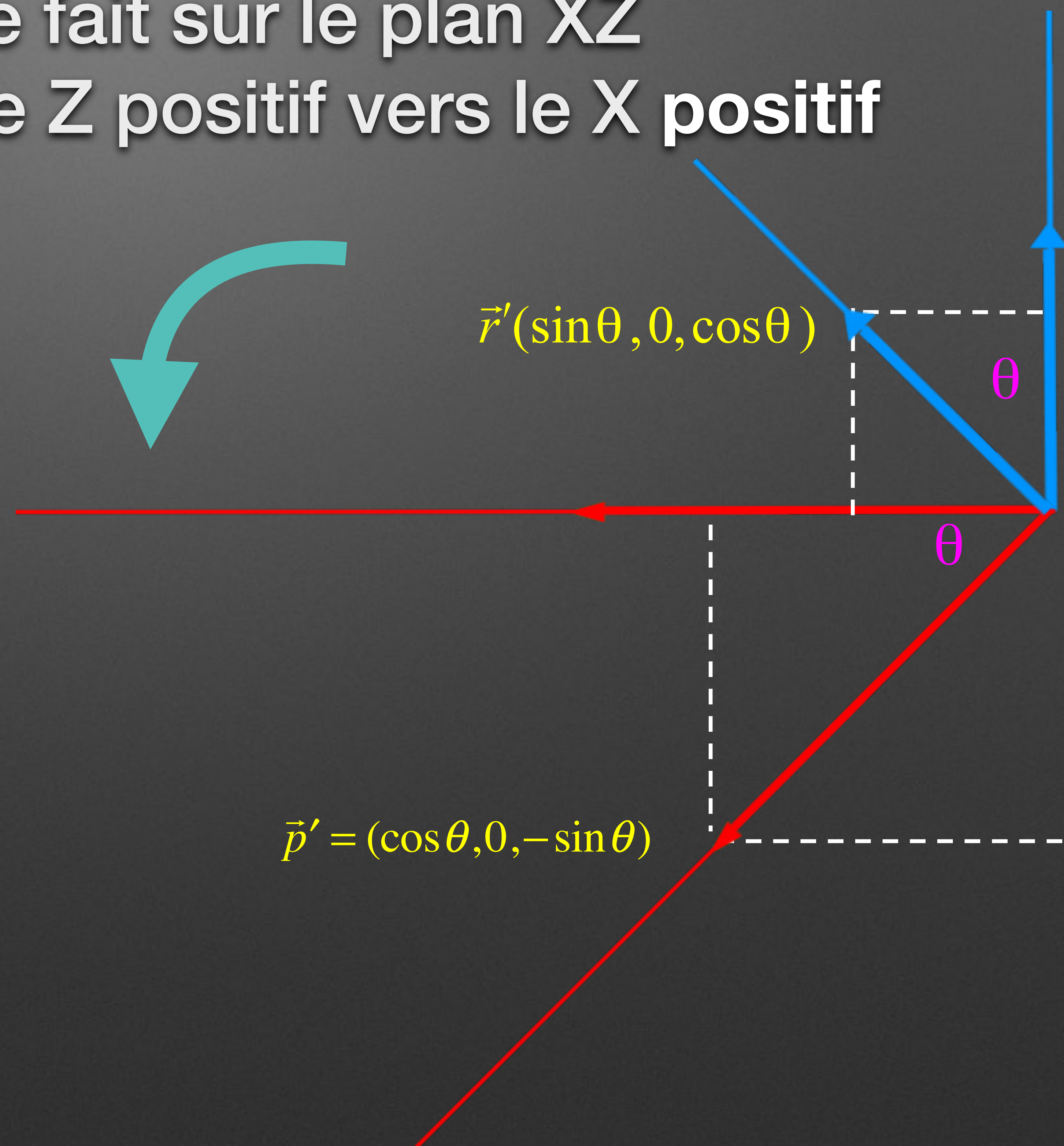
La rotation sur l'axe X se fait sur le plan ZY
Le sens de rotation et de Y positif vers le Z positif




$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{p}' & \vec{q}' & \vec{r}' & \end{array} \\ R_x(\theta) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Les Transformations en 3D
# Rotation en 3D autour du Y

La rotation sur l'axe Y se fait sur le plan XZ
Le sens de rotation et de Z positif vers le X **positif**




$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \vec{p}' & \vec{q}' & \vec{r}' & \end{array} \\
R_y(\theta) = & \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# Les Transformations en 3D

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Les Transformations en 3D

Rotation, Mise à l'échelle, Reflection

Translation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & k & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilisé dans la projection

Mise à l'échelle uniforme