

Chapitre 1 : Modélisation des systèmes

1. Introduction :

La modélisation est la représentation (mathématique ou physique) d'un système par un autre plus simple et intégrant plus ou moins de connaissances physiques, donc plus facile à étudier. Il existe deux types de modèles selon la complexité du système à étudier : modèle de connaissance ou de représentation.

2. Définition du modèle :

Le modèle est un ensemble d'équations mathématiques qui relie l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$, le modèle et le système doivent se conduire identiquement dans des conditions aussi variées que possible: le modèle doit être fidèle, précis et simple.

3. Type du modèle :

Il existe divers types de modèle chacun étant destiné à une application particulière, nous pouvons les classer en deux grandes catégories :

3.1 Modèle de connaissance :

Les modèles de connaissances sont basés généralement sur les lois (de la physique, de la chimie, ...) qui permettent de décrire complètement le système pour une meilleure simulation et conception des procédés. Ce type de modèle est souvent complexe et peu utilisé en automatique.

Exemple 1 : Soit le circuit RLC représenté par la figure suivante :

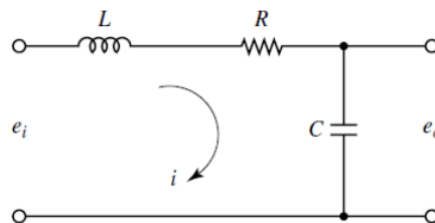


Figure (I.1) : Circuit RLC.

En appliquant la loi de tension de Kirchhoff, on obtient les équations suivantes :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int idt = e_i$$

$$\frac{1}{c} \int idt = e_o$$

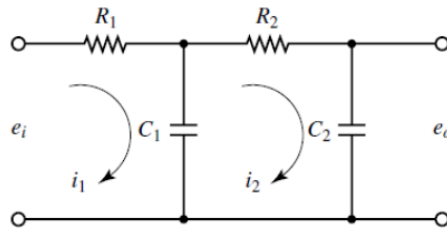
On peut obtenir la fonction de transfert du système en appliquant la transformée de Laplace sur les équations précédentes :

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{c} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{c} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

Si e_i est l'entrée et e_o la sortie, alors :

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Exemple 2 :**Figure (I.2) :** Circuit électrique en cascade.

Supposons que e_i est l'entrée et e_o est la sortie ; les capacités C_1 et C_2 ne sont pas chargées initialement. On constate que le deuxième étage du circuit (partie R_2C_2) constitue une charge pour le premier étage (partie R_1C_1). Les équations pour ce système sont comme suit :

$$\frac{1}{c_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 + \frac{1}{c_2} \int i_2 dt &= 0 \\ \frac{1}{c_2} \int i_2 dt &= e_o \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace sur ces équations, on obtient :

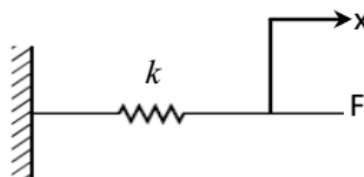
$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) &= E_i(s) \\ \frac{1}{c_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{c_2 s} I_2(s) &= 0 \\ \frac{1}{c_2 s} I_2(s) &= E_o(s) \end{aligned}$$

Et enfin, on obtient la fonction de transfert comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{E_0(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1) + (R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

Exemple 3 : Modélisation d'un ressort

La relation entre une force F exercé sur un ressort de raideur k dans le sens d'un déplacement x (Figure I.3) est donnée par : $F = kx$

**Figure (I.3) :** Système à ressort.

Les figures suivantes présentent deux systèmes à ressort, l'un en parallèle et l'autre en série :

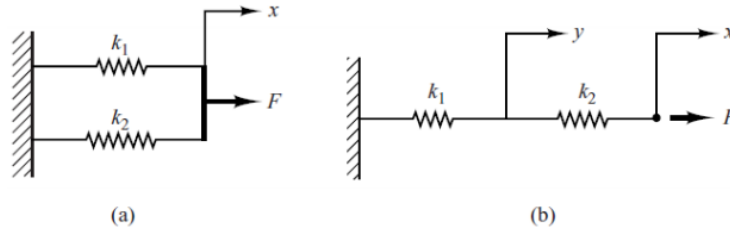


Figure (I.4) : Systèmes à ressort : (a) en parallèle, (b) en série

La raideur équivalente pour le système à ressorts en parallèle est donnée par :

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x, \text{ avec : } k_{eq} = k_1 + k_2$$

Pour le système à ressort en série, on a :

$$k_1 y = F, k_2 (x - y) = F, \text{ d'où : } k_2 \left(x - \frac{F}{k_1} \right) = F, \text{ ou encore :}$$

$$k_2 x = \left(F + \frac{k_2}{k_1} F \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F = k_{eq} F$$

La raideur équivalente des ressorts en série est donc donnée par :

$$k_{eq} = \left(\frac{F}{x} \right) = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Exemple 4 : Modélisation de l'amortisseur

Un amortisseur à huile est un dispositif qui exerce un frottement visqueux ou un amortissement. Il se compose d'un piston et d'un cylindre rempli d'huile (voir figure ci-après), où b_1 est le coefficient de frottement visqueux.

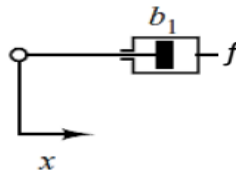


Figure (I.5) : Amortisseur à huile.

L'huile résiste à tout mouvement entre la tige et le cylindre rempli d'huile. L'amortisseur absorbe essentiellement l'énergie et la dissipe sous forme de chaleur. La relation entre une force f exercé sur l'amortisseur dans le sens d'un déplacement x est donnée

$$\text{par : } f = b_1 \cdot \frac{d}{dt} x = b_1 \cdot \dot{x}$$

Soit le système d'amortisseurs en série ou en parallèle représenté par la figure suivante :

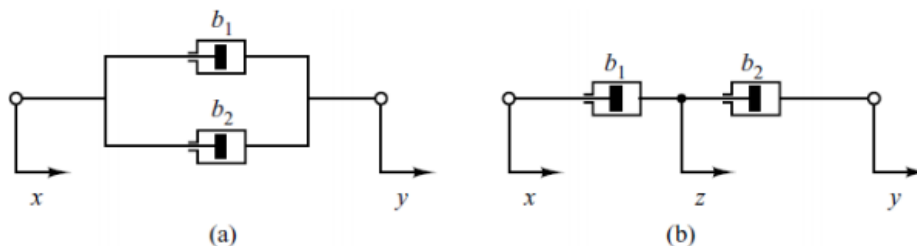


Figure (I.6) : Systèmes d'amortisseurs : (a) en parallèle, (b) en série.

Pour le système en parallèle, on a :

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x}) = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

Avec : $b_{eq} = (b_1 + b_2)$

Pour le système en série, on a :

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}), \text{ donc : } (b_1 + b_2) \cdot \dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

Avec $z = y - x$ est le déplacement entre les amortisseurs b_1 et b_2 , donc :

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1+b_2} (b_2\dot{y} + b_1\dot{x})$$

$$\text{et } f = b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2 \left[\dot{y} - \frac{1}{b_1+b_2} (b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \right] = \left[\frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} (\dot{y} - \dot{x}) \right] = \frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} \dot{z}$$

$$\text{donc : } b_{eq} = \frac{b_1 \cdot b_2}{b_1+b_2} = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}$$

3.2 Modèle de représentation :

Lorsque l'analyse interne du système n'est pas possible (lois internes inconnues, mesures internes impossible ou difficiles) ou trop complexes, on est amené à considérer le système comme une boîte noire et à partir de l'observation de ses entrées/sorties (comportement externe) et de mesures expérimentales, on établit alors la relation mathématique qui lui correspond au mieux. Ce type de modèle est le plus utilisé en automatique. On distingue deux classes de modèle dynamique linéaire :

3.2.1 Modèles non paramétriques :

Ils sont décrits par des réponses impulsionnelles ou par des réponses indicielles, permettant de caractériser un système dynamique linéaire.

3.2.2 Modèles paramétriques :

Ils sont décrits par des fonctions de transfert dans le cas continu, ou bien par des équations aux différences dans le cas discret.

Exemple : Soit le moteur à courant continu asservis en vitesse.

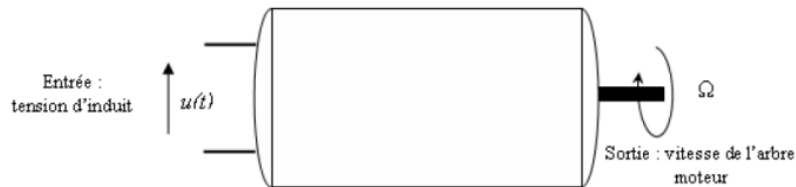


Figure (I.7) : Moteur à courant continu asservis en vitesse.

Son modèle physique (électrique) est représenté par la figure suivante :

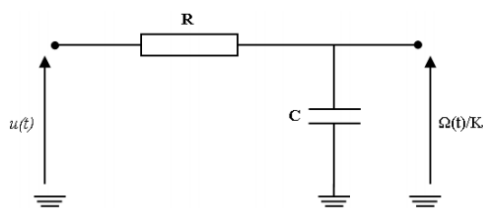


Figure (I.8) : Modèle électrique du moteur à courant continu.

Le modèle de connaissance est donné par :

$$\Omega(t) + \tau_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} = K_v u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{RJ}{aR + \phi_0^2} \\ K_v = \phi_0 \frac{1}{aR + \phi_0^2} \end{cases}$$

a : nombre de paires de voies d'enroulement et ϕ_0 : flux par pôles (Wb).

Le modèle de représentation (obtenu expérimentalement) est donnée par :

$$\Omega(t) + \tau_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} = K_v u(t) \quad \text{avec : } \begin{cases} \tau_1 = 20ms \\ K_v = 50 (rd/s)/v \end{cases}$$

4. Modèle mathématique :

La détermination d'un modèle mathématique d'un processus nécessite en général diverses hypothèses simplificatrices afin de limiter sa complexité. Dans chaque application, il apparaît nécessaire de faire un compromis entre la finesse et la précision du modèle à mettre en œuvre d'une part, et la limite de complexité admissible, compte tenu des objectifs fixés, d'autre part.

Considérons à titre d'exemple un modèle d'automobile. Si le but du modèle est d'étudier la résistance au vent du véhicule, il suffit de prendre en compte la forme extérieure du véhicule et l'état des diverses surfaces qui le caractérisent. Si on s'intéresse à la résistance du véhicule en cas de choc, le modèle sera plus complexe et devra faire intervenir les caractéristiques géométriques et mécaniques de la carrosserie mais également du châssis et de l'ensemble de la structure interne de la voiture. Lorsque l'objectif est de prévoir le comportement du véhicule en fonctionnement, le modèle pourra être simplifié du point de vue de la plupart des structures qui pourront être supposées rigides mais par contre, on devra tenir compte des caractéristiques du moteur, des amortisseurs, ..., etc.

5. Types de modèle mathématique :

5.1 Modèle à temps continu :

Un procédé ou un système peut être représenté soit par ses équations d'état soit par sa fonction du transfert, la forme canonique de la représentation d'état est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.1)$$

Avec :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: Colonne qui représente les n variables d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Colonne qui représente les m commandes.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$: Colonne qui représente les p sorties.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrice d'état.

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice de commande.

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: Matrice d'observation.

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: Matrice d'action directe.

Le schéma bloc équivalent des équations d'état est illustré sur la figure suivante :

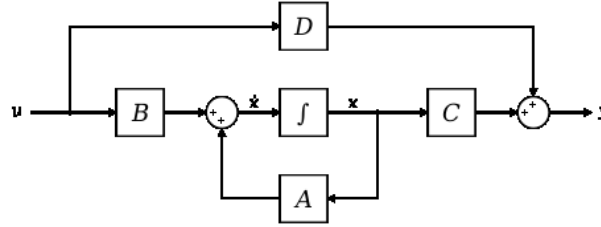


Figure (I.9) : Représentation d'état matricielle.

Les colonnes x , u et y représentent des vecteurs $x \in X$, $u \in U$ et $y \in Y$ dans des bases des espaces vectoriels X , U et Y . Les vecteurs X , U et Y vérifient les équations :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (I.2)$$

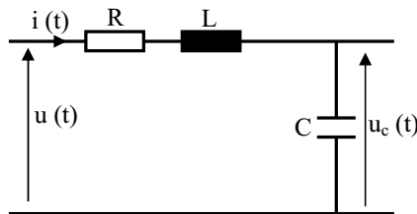
En posant $x(t = 0) = 0$, la transformation de Laplace de ce système conduit à :

$$\begin{cases} L\{\dot{X} = AX + BU\} \Rightarrow pX(p) = AX(p) + BU(p) \Rightarrow X(p) = [pI_n - A]^{-1}BU(p) \\ L\{Y = CX + DU\} \Rightarrow Y(p) = CX(p) + DU(p) \Rightarrow Y(p) = (C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D)U(p) \end{cases} \quad (I.3)$$

Alors la fonction du transfert du système est donnée par :

$$G(p) = C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D \quad (I.4)$$

Exemple : Soit le circuit RLC suivant :



Les équations électriques de l'entrée $u(t)$ et la sortie $u_c(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_c(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases} \quad (I.5)$$

On pose $x_1(t) = u_c(t)$, $x_2(t) = i(t)$, Alors :

$$X = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, U = [u(t)], Y = [u_c(t)]$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} U$$

$$Y = [1 \quad 0]X + [0]U$$

La fonction du transfert est donnée par : $G(p) = C \cdot [pI_n - A]^{-1}B + D$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

$$\text{Donc : } G(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$\text{Si } RC = LC = 1, \text{ Alors : } G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Instructions Matlab :

```
A= [0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1 0]; D=[0] ;
sys=ss(A,B,C,D) ;% ss permet de déclarer le modèle
                %par ses équations d'état
% on utilise tf pour afficher la fonction du transfert
y=tf(sys)
Transfer function:
      1
-----
s^2 + s + 1
```

5.2 Modèle à temps discontinu ou discret :

A cause du développement du calculateur numérique, la commande numérique des procédés est l'un des vastes domaines dans l'automatique. Cette commande nécessite un modèle de représentation échantillonné. Ce modèle peut être établi directement à partir d'une fonction du transfert continu ou à partir de la discrétisation des équations d'état.

Dans le cas du passage d'une fonction du transfert continue à une fonction du transfert discrète (avec un temps d'échantillonnage T_e) on peut remplacer l'opérateur de dérivé p par l'une des approximations suivantes :

- Approximation rectangulaire retardée du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t - T_e)}{T_e} \Rightarrow p \approx \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

- Approximation rectangulaire avancée du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t + T_e) - x(t)}{T_e} \Rightarrow p \approx \frac{z - 1}{T_e}$$

- Approximation bilinéaire (Trapézoïdale) du dérivé :

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{x(t) - x(t - T_e)}{x(t) + x(t - T_e)} \Rightarrow p \approx \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La fonction bilinear de MATLAB de la toolbox control permet de transformer une fonction de transfert en temps continu à une fonction de transfert en temps discret. On notera qu'en automatique les praticiens parlent d'une transformation de Tustin.

On peut légèrement modifier la transformée bilinéaire - on parle de prewarping - en introduisant une fréquence f_p dite fréquence pivot.

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{\pi f_p T_e}{\tan(\pi f_p T_e)} \cdot \frac{2}{T_e} \cdot \frac{x(t) - x(t - T_e)}{x(t) + x(t - T_e)} \Rightarrow p \approx \frac{\pi f_p T_e}{\tan(\pi f_p T_e)} \cdot \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La représentation par les équations d'état a la forme générale suivante :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \\ Y_k = C_k X_k + D_k U_k \end{cases}$$

Si le modèle est linéaire invariant le système devient :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU_k \\ Y_k = CX_k + DU_k \end{cases}$$

Instructions Matlab :

Prenant l'exemple précédent avec $R = L = C = 1$, les matrices des équations d'état deviennent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
A= [0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1 0]; D=[0]; fz = 10
[Ad,Bd,Cd,Dd]=bilinear (A,B,C,D,fz) ;
% bilinear permet de déclarer le modèle
% par ses équations d'état discrètes
% fz : fréquence de l'échantillonnage
% on utilise tf pour afficher la fonction du transfert
[Ad,Bd,Cd,Dd]=bilinear (A,B,C,D,fz)
Ad =
    0.9952    0.0950
   -0.0950    0.9002
Bd =
    0.0150
    0.3005
Cd =
    0.3155    0.0150
Dd =
    0.0024
% fonction du transfert
num=[1];den=[1 1 1];
[numd,dend]=bilinear (num,den,10)
numd =
    0.0024    0.0048    0.0024
dend =
    1.0000   -1.8955    0.9050
y1=tf(numd,dend,0.1)
Transfer function:
0.002375 z^2 + 0.004751 z + 0.002375
-----
          z^2 - 1.895 z + 0.905
Sampling time (seconds): 0.1
```

5.3 Modèle linéaire :

Un tel modèle caractérise un processus susceptible d'être décrit par une équation différentielle ordinaire ou une équation récurrente à coefficients constants (stationnaire) ou fonction du temps (non stationnaire) ou par un ensemble d'équations de ce type.

La propriété fondamentale des systèmes linéaires s'exprime par le principe de superposition : si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ représentent respectivement l'évolution des sorties du processus pour les entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur un horizon et pour un état initial donnés, alors, à l'entrée $u(t)$:

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \quad (\text{I.6})$$

Où α_1 et α_2 sont réels, correspondant la sortie :

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad (\text{I.7})$$

Sur le même horizon et pour les mêmes conditions initiales.

Les systèmes linéaires stationnaires admettent une représentation entrée-sortie par fonction ou matrice de transfert, en s ou en z selon qu'il s'agit d'un modèle continu ou discret.

5.4 Modèle non linéaire :

Dans un modèle non linéaire, le théorème de superposition n'est plus valable. L'aspect non linéaire peut être intrinsèque et quasiment irréductible, comme dans la modélisation de la loi d'action de masse en chimie, ou correspondre à l'association d'éléments à caractéristiques non linéaires à des systèmes pour lesquels un modèle linéaire est utilisable comme c'est le cas des systèmes à non linéarités séparables (figure (I.10)).

Dans certains cas, lorsque le processus non linéaire est utilisé dans une plage de variation limitée de ses variables d'état, l'évolution s'effectuant autour d'une valeur x_0 donnée, il est possible d'effectuer une linéarisation autour de ce point de fonctionnement en prenant comme nouvelle variable l'expression $\delta x = x - x_0$.

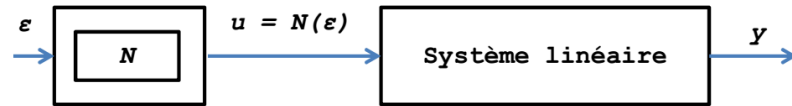


Figure (I.10) : Système à non linéarité séparable.

On néglige alors dans développement limité de la fonction $f(\cdot)$ les termes d'ordre supérieur à 1. Il vient par exemple pour la relation :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (\text{I.8})$$

Si la fonction f admet des dérivées partielles continues au premier ordre, le modèle linéarisé (I.9) valable pour (x, u) évoluant dans un voisinage de (x_0, u_0) :

$$\frac{d}{dt}\delta x = F_x(x_0, u_0, t)\delta x + F_u(x_0, u_0, t)\delta u \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$$\delta x = x - x_0, \delta u = u - u_0, \text{ et où :}$$

$$F_x = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, F_u = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

Sont les matrices jacobiniennes de f en x et u . Il est également possible d'effectuer une linéarisation autour d'une trajectoire d'évolution, donnée solution de (I.8).

Pour certains processus non linéaires et/ou non stationnaires, on adopte aussi parfois une représentation multi-modèle, chaque modèle étant représentatif de l'évolution du processus dans un domaine limité de l'espace et du temps. Ainsi un système linéaire non stationnaire peut être représenté par un ensemble de modèles linéaires à coefficients constants se succédant au cours du temps.

La mise en œuvre de tels modèles en vue de la résolution d'un problème donné nécessite bien sûr une validation terminale.