COMBINATOIRE I CHAPITRE III (MASTER I AMD)

1 III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier le principe général pour compter le nombre d'éléments dans une réunion d'ensembles finis $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, où les ensembles A_i peuvent avoir des éléments en communs. Ce principe est connu sous le nom : principe d'inclusion-exclusion. Après la présentation de ce principe, on donnera des exemples illustratifs sur son utilisation, notamment sur le calcul des applications surjectives d'un ensemble fini E vers un ensemble fini F, et le calcul du nombre de dérangements dans un ensemble fini E. Pour le calcul du nombre de surjections d'un ensemble fini E de cardinal n vers un ensemble F de cardinal m, on va considérer toutes les applications de E vers F dont le nombre est m^n, et on retranchera de ceux-ci le nombre des applications de E vers F qui n'admettent pas au moins un antécedent, il nous reste donc que les surjections . De même, pour calculer le nombre de dérangements dans un ensemble E de cardinal n, on considère toutes les permutations de E dont le nombre est $n!$, et on retranchera de ceux-ci les permutations qui laissent au moins un élément de E fixe. Cette façons de procéder est appelée inclusion-exclusion c.à.d on inclu toutes les éléments de l'ensemble en question et on execlu de ceux-ci les éléments qui ne possedent pas certaine properiétés (surjectivité, être un dérangement,...etc).

Avant de présenter ce principe dans le cas général, on commence par considérer le cas le plus simple de réunion non disjoints deux ou bien trois ensembles.

Proposition1 *Si A, B sont deux ensembles finis, alors* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Preuve: Il suffit d'appliquer le principe additif pour la partition de la réunion $A \cup B$ en $\{A - B, A \cap B, B - A\}$. On a $|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$. Mais on a $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ et $|B - A| = |B| - |A \cap B|$, donc $|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + |A \cap B| + (|B| - |A \cap B|) = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercice 1 Soit A, B deux ensembles finis. Calculer card$(A \triangle B)$.

Proposition 2 *Si A, B, C sont trois ensembles finis, alors* $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Preuve: Il suffit d'appliquer la proposition 1 pour l'union $(A \cup B) \cup C$.

Pour le cas général, on fait tout d'abord un rappel sur la notion de fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble référentiel E. Cette fonction caractéristique permet de distinguer les éléments de E qui sont dans A et ceux qui ne sont pas. Rappelons qu'on appelle complémentaire de la partie A par rapport à l'ensemble réferentiel E, la partie formée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, on la note $\overline{A}$ (voir figure ci-dessous) on $\overline{A} = E - A$. Si l'ensemble E est fini alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$. On a les propriétés suivantes sur la complémentation

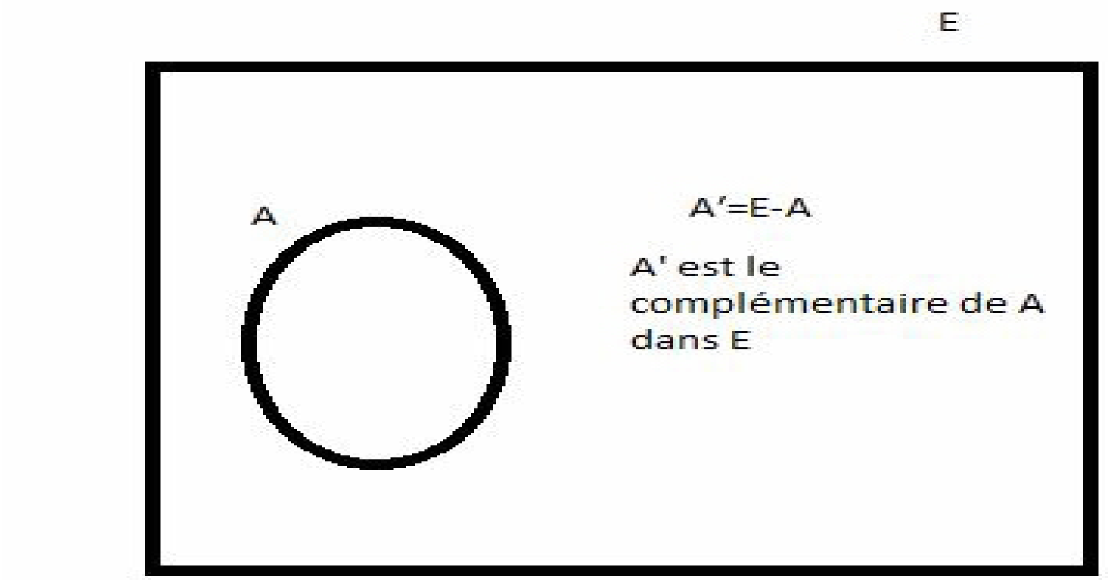
1/ $A \cup \overline{A} = E$,

2/ $A \cap \overline{A} = \emptyset$,

3/ $\overline{\overline{A}} = A$,

4/ $\overline{\emptyset} = E$,

5/ $\overline{E} = \emptyset$.



Les lois de De Morgan nous seront utiles par la suite:

Pour $A, B \subseteq E$ on a:

6/ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

7/ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

D'une manière générale, si $(A_i)_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ est une famille de parties d'un ensemble reférentiel E, on a les lois de De Morgane généralisées:

8/ $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$,

9/ $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

2 III.2 Principe d'inclusion-exclusion

On a déja utilisé la fonction caractéristiques dans le chapitre II, où à toute partie $A \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ on lui associe une suite binaire unique de B^n où $B = \{0, 1\}$. On fait un bref rappel sur cette notion.

Soit A une partie d'un ensemble E. A la partie A on associe une application de E vers $B = \{0, 1\}$ qu'on appelle la fonction caractéristique de A qu'on note χ_A. Cette application est définie par : $\left\{ \begin{array}{c} \chi_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ \chi_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right\}$.

Exemple1: Soient $E = \{a, b, c\}$ et la partie $A = \{a, b\}$. La fonction caractéristique de la partie A est définie par :$\chi_A(a) = 1$, $\chi_A(b) = 1$, $\chi_A(c) = 0$ ou bien la séquence (110).

La fonction caractéristique de la partie $\emptyset$ est $\chi_\emptyset(a) = \chi_A(b) = \chi_A(c) = 0$, ou bien la séquence (000).

La fonction de caractéristique de la partie E est $\chi_E(a) = \chi_E(b) = \chi_E(c) = 1$, ou bien la séquence (111).

En associant à chaque partie A d'un ensemble E sa fonction caractéristique, on obtient une bijection entre les parties de E et les fonctions caractéristique associées à ces parties. En d'autres mots on obtient la bijection suivante :

Théorème 1

L'application $\chi : \wp(E) \to B^E$

$A \longmapsto \chi(A) = \chi_A$ *est une bijection.*

Exercice 2 Démontrer que l'application $\chi : \wp(E) \to B^E$

$$A \longmapsto \chi(A) = \chi_A$$

est une bijection.

Les fonctions caractéristiques des parties suivantes peuvent etre obtenus en utilisant l'algèbre de Boole sur les parties d'un ensemble référentiel E.

1/ $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$,

2/ $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$,

3/$\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$,

4/ $\chi_{A\cup B\cup C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_{A\cap B} - \chi_{A\cap C} - \chi_{C\cap B} + \chi_{A\cap B\cap C}$.

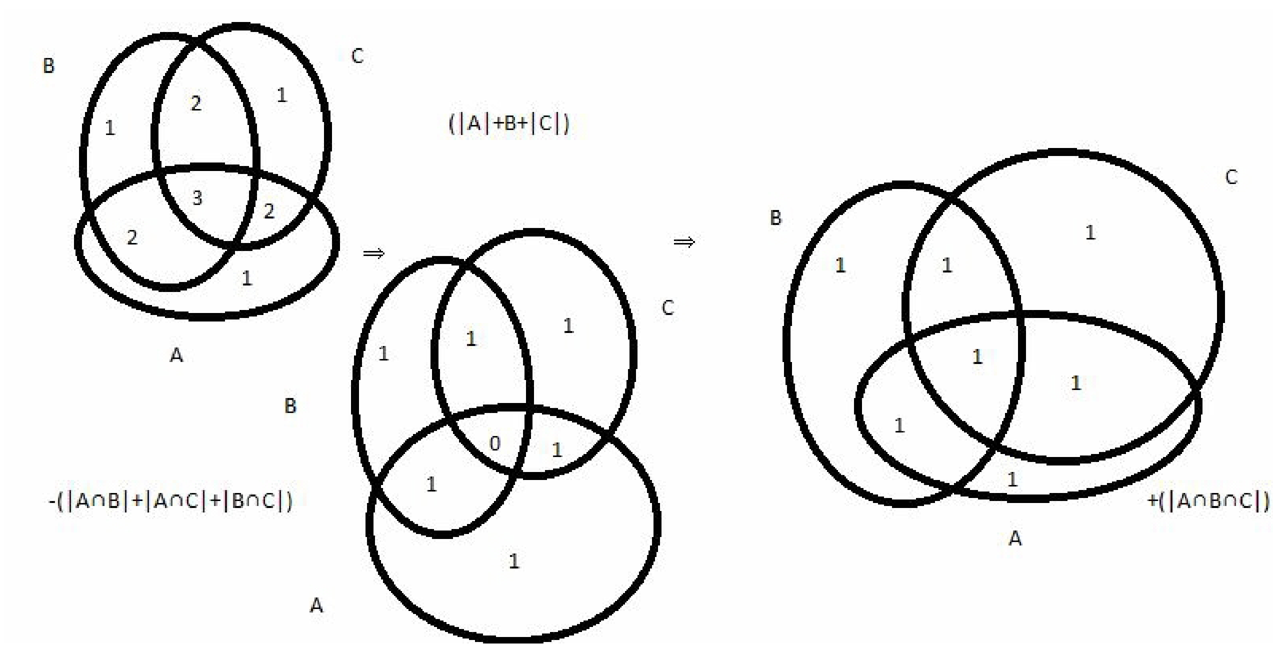
Démontrons par exemple la 4-ième propriété.

Dans l'ensemble E,On a $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et

donc $A \cup B \cup C = \overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}$. D'après la propriété 3, on a
$\chi_{A\cup B\cup C} = 1 - \chi_{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}} = 1 - \chi_{\overline{A}} \times \chi_{\overline{B}} \times \chi_{\overline{C}}$
$= 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B)(1 - \chi_C)$
$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C,$
et par suite on : $\chi_{A\cup B\cup C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_{A\cap B} - \chi_{A\cap C} - \chi_{B\cap C} + \chi_{A\cap B\cap C}$.
Comme on a $\sum_{e\in E} \chi_A(e) = |A|$ pour une partie quelconque $A \subseteq E$, on a :
$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Le schéma ci-dessous, montre une illustration de la formule sur 3 ensembles A, B et C

non nécéssairement disjoints. En sommant en premier lieu $(|A| + |B| + |C|)$, chaque élément appartenant seulement à A (respectivement B, C) est compté une seule fois, alors que les éléments appartenant aux intersections $A \cap B$, $A \cap C$, et $B \cap C$ sont comptés chacun 2 fois et les éléments appartenant à l'intersection $A \cap B \cap C$ sont chacun comptés 3 fois. A cet effet, on va retrancher par la formule $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$, les éléments appartenant aux trois intersections, mais il faut ajouter cette fois ci $|A \cap B \cap C|$, car on vient de le retrancher 3 fois dans l'expression $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. Le schéma ci-dessous illustre cette situation.



Exercice Montrer en utilisant la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensmble fini E qu'on a $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Basic examples

Suppose a group of students are studying logic or mathematics. If 12 are studying logic, 26 are studying mathematics and 5 are studying both subjects. How many students are in the group.

Solution

let A be the group of students studying logic,

and let B be the group of students studying mathematics. Find $|A \cup B|$.

Solution

We have $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$ then the total students is $26+12-5 = 33$. And

we have $12-5 = 7$ which study logic only and $26-5 = 21$ which study mathematics only.

Exemple 2 Déterminer le nombre des entiers naturels ≤ 1000 non divisibles ni par 3,ni par 5 ni par 7.

Let A be the subset of integers which are divisible by 3, B the subset of integers which are divisible by 5, and C the subset of integers which are divisible by 7. Then $S = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ since each element of S is not divisible by $3, 5$ or 7.

By integer division we have $|A| = 1000/3 = 333$,i.e, the number from 3 to 999,

$|B| = 1000/5 = 200$,

$|C| = 1000/7 = 142$,

$|A \cap B| = 1000/15 = 66$ (the numbers divisible by 3 and 5 $=$ the numbers divisible by 15),

$|A \cap C| = 1000/21 = 47$,

$|B \cap C| = 1000/35 = 28$,

$|A \cap B \cap C| = 1000/105 = 9$.

Thus, by the inclusion exclusion principle, we have:

$|S| = 1000-(333+200+142)+(66+47+28)-9 = 1000-675+141-9 = 457$ numbers are not divisible by $3, 5$ or 7.

2.1 III.2.1 Le principe d'inclusion-exclusion en utilisant des ensembles finis

It is now not difficult to see how to extend this formula to deal with the general case of the number of elements in a union of n sets.

Theorem 2 (the inclusion-exclusion theorem)

For all sets $A_1, A_2, ..., A_n$

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$

$= (|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|)$
$- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-1} \cap A_n|)$
$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|)$
$+$..
$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$
$= \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{ik}| \right).$
here the expression $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ under the summation is taken for all the strict increasing sequences of natural numbers of length k with $1 \leq k \leq n$. In others words, the expression $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ is a sum over all the $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ distinct integers j-tuples $(i_1, ..., i_j)$ satisfying $1 \leq i_1 < ... < i_j \leq k$ and k varies between 1 and

Par exemple, pour $n = 1$ on a seulement $k = 1$, et donc la seule sequence croissante d'entiers natureles de longueur 1 entre $1 \leq i_1 \leq 1$ est bien $i_1 = 1$, et donc $|A_1| = \sum_{k=1}^{n=1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 1} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{ik}| \right) = (-1)^{1+1} (|A_1|) = |A_1|$.

Pour $n = 2$, l'entier natural k varie entre 1 et 2 et par suite, il faut voir avec les séquences de longueurs 1 et les séquences de longueurs 2. On a deux séquences de longueur 1 qui sont: $1 \leq i_1 = 1 \leq 2$ et $1 \leq i_2 = 2 \leq 2$ et une seule séquence de longueur 2 qui est $1 \leq i_1 = 1 \leq i_2 = 2 \leq 2$ et par suite on a:
$\left| \bigcup_{i=1}^{2} A_i \right| = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 2} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{ik}| \right)$
$= (-1)^{1+1} (|A_1| + |A_2|) + (-1)^{2+1} (|A_1 \cap A_2|)$
$= (|A_1| + |A_2|) - (|A_1 \cap A_2|).$

Pour $n = 3$, les suites strictements croissantes entre 1 et 3 sont:

- 3 suites de longueur 1 qui sont:$1 \leq i_1 = 1 \leq 3$, $1 \leq i_2 = 2 \leq 3$, $1 \leq i_3 = 3 \leq 3$.
- 3 suites de longueur 2 qui sont:$(i_1 < i_2) = (1 < 2)$; $(i_1 < i_3) = (1 < 3)$; et $(i_2, i_3) = (2 < 3)$.
- et une seule suite de longueur 3, qui est $(i_1 < i_2 < i_3) = (1 < 2 < 3)$. Et par suite, la formule s'écrit:

$\left| \bigcup_{i=1}^{3} A_i \right| = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq 3} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{ik}| \right)$
$= (-1)^{1+1} (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (-1)^{2+1} (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (-1)^{3+1} (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$
$= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|).$

Exercice 3Démontrer par récurrence sur n le théorème d'inclusion-exclusion.

2.2 III.2.2 Principle of Inclusion and exclusion using the conditions

Suppose we have a set of N objects that have various properties or conditions α, β, γ,..., λ. Each of the object may have any or none of these properties. Let N_α the number of objects that have property α. Some of these objects may have other properties in addition to property α. Similarly, let N_β be the number of objects that have property B, and so on. Let $N_{\alpha\beta}$ be the number of objects that have both property α and property β, also $N_{\alpha\gamma}$ be the number of objects that have both property α and γ, etc. Finally denote by $N_{\alpha\beta\gamma...\lambda}$ the number of objects with all the properties. Given all this information, we wish to find N_0 the number of objects that have none of the properties. The general formula for computing this is called the principal of inclusion and exclusion

$$\begin{aligned} N_0 = {} & N - N_\alpha - N_\beta - N_\gamma - ... - N_\lambda \\ & + N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\gamma} + ... + N_{\alpha\lambda} + ... + N_{\kappa\lambda} \\ & - N_{\alpha\beta\gamma} - N_{\alpha\beta\delta} - ..... \\ & .... \\ & \mp N_{\alpha\beta\gamma...\lambda}. \end{aligned}$$

Using the notion of characteristic function attached to a subset A of universe U we can derive the above formula.

Let U the set of universe (the totality of things) in which we are interested. And $A, B, C, ...$etc represent subsets of U and x, y, z etc will be individual objects of U.

For any set A, we define the characteristic function attached to A by $A(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ if } x \in A \\ 0 \text{ if } x \notin A \end{array} \right\}$.

Example 3 Let $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, and let A be the subset of U consisting of the divisors of 6. Then $A(1) = 1$, $A(2) = 1$, $A(3) = 1$, $A(4) = 0$, $A(5) = 0$, $A(6) = 1$. Note that also we have $U(x) = 1$ for all $x \in U$ and $\emptyset(x) = 0$ for all $x \in U$.

The complement of A, denoted $\overline{A}$ consists of exactly those objects of U that are not in A. Then the characteristic function attached to $\overline{A}$ is:

$\overline{A}(x) = 1 - A(x)$.

If $C = A \cap B$ then $C(x) = A(x)B(x)$,

If $D = A \cup B$ then $D(x) = 1 - (1 - A(x))(1 - B(x)) = A(x) + B(x) - A(x)B(x)$. Finally, the number of elements in a set $A \subseteq U$ is the summation of the characteristic function over all elements in the finite set U, i.e, $\sum\limits_{x \in U} A(x)$. So we can now transform operations on sets into arithmetic operations. Let A be the set of objects with property α, and B the set of objects with property β. We let $\hat{N}$ be the set of objects having none of the properties $\alpha, \beta, ..., \lambda$. What is the characteristic function of $\hat{N}$. Every element of $\hat{N}$ is contained in the complement of each of the sets A, B, ..., L. That is $\hat{N}$ is the intersection of the complements of all of the individuals sets. So the characteristic function is $\hat{N} = (1 - A)(1 - B)(1 - C)...(1 - L)$. We want to know how many elements are in the set $\hat{N}$, i.e, the number of elements having none of the properties. And this number is:

$$\sum_{x\in U}(1-A)(1-B)(1-C)...(1-L)$$
$$=\sum_{x\in U}((1-A-B-C-...-L)+AB+AC+...+KL$$
$$-ABC-$$
$$+ABCD$$
$$.$$
$$.$$
$$\overset{-}{+}ABC...L)$$
$$=\sum_{x\in U}1-\sum_{x\in U}A-\sum_{x\in U}B-...-\sum_{x\in U}L$$
$$+\sum_{x\in U}AB......$$
$$-\sum_{x\in U}ABC$$
$$.$$
$$.$$
$$\overset{-}{+}\sum_{x\in U}ABC...L.$$
$$\Longrightarrow N_0=N-N_\alpha-N_\beta-N_\gamma-...-N_\lambda$$
$$+N_{\alpha\beta}+N_{\alpha\gamma}+...+N_{\alpha\lambda}+...+N_{\kappa\lambda}$$
$$-N_{\alpha\beta\gamma}-N_{\alpha\beta\delta}-.....$$
$$................................$$
$$\overset{-}{+}N_{\alpha\beta\gamma...\lambda}.$$

Problem1

How many integers are there in the range from 1 to 1000.000 which are divisible by 2 or by 3 or both?

Solution

We let D_2 and D_3 be the sets of those integers in the range from 1 to 1000.000 which are divisible by 2 and by 3 respectively. By the above theorem 1, we have:
$|D_2|=500.000$, $|D_3|=333.333$.
Any integer is divisible by both 2 and 3 iff it is divisible by 6. Hence $|D_2\cap D_3|=166.666$. Thus $|D_2\cup D_3|=500.000+333.333-166.666=666667$.

Example 4

The Euler $\varphi-$function is defined by $\varphi(n)=|\{k\in\mathbb{N}^+:k<n \text{ and } \gcd(k,n)=1\}|$ and this function is multiplicative i.e, if the natural numbers m and n are coprime ($gcd(m,n)=1$) then $\varphi(nm)=\varphi(n)\times\varphi(m)$. Calculate, using inclusion-exclusion theorem, a formula for $\varphi(n)$ when the distinct prime factors of n are $p_1,p_2,...,p_k$. show that $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{pk}\right)$.
If $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}$ then $\gcd\left(p_i^{e_i},p_j^{e_j}\right)=1$ for all $1\leq i,j\leq k$ with $i\neq j$. We obtain then $\varphi(n)=\varphi(p_1^{e_1})\times\varphi(p_2^{e_2})\times...\times\varphi(p_k^{e_k})$. (Rappelons que si p est un nombre

premier alors les seuls diviseurs de p sont les nombres 1 et p, et donc les seuls diviseurs de p^t sont les nombres: p^1, p^2, $p^3, ..., p^t$. Et par conséquent, le seul diviseur commun des nombres $p_i^{e_i}$ et $p_j^{e_j}$ est le nombre 1, c.à.d $\gcd\left(p_i^{e_i}, p_j^{e_j}\right) = 1$).

$\varphi\left(p_t^{e_t}\right)$ représente le nombre des entiers naturels entre 1 et $p_t^{e_t}$ qui sont premiers avec $p_t^{e_t}$. les nombres entre 1 et $p_t^{e_t}$ qui ne sont pas premiers avec $p_t^{e_t}$ sont les multiples du nombre premier p_t et ces nombres sont: $1p$, $2p, 3p, ..., p^2, 2\times p^2, ..., p^3, ...p^{e_t-1}\times p$ dont le cardinal est p^{e_t-1}. Comme il y'a $p_t^{e_t}$ nombre natural entre 1 et $p_t^{e_t}$ donc, par inclusion exclusion on a $\varphi\left(p_t^{e_t}\right) = p_t^{e_t} - p^{e_t-1} = p^{e_t-1}\left(p_t - 1\right)$.

Appliquons ce resultat au calcul de $\varphi(n)$. On a donc:
$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{e_1}\right)\times\varphi\left(p_2^{e_2}\right)\times ... \times\varphi\left(p_k^{e_k}\right) =$
$= p^{e_1-1}\left(p_1-1\right)p^{e_2-1}\left(p_2-1\right)...p^{e_k-1}\left(p_k-1\right)$
$= p^{e_1-1}p^{e_2-1}...p^{e_k-1}\left(p_1-1\right)\left(p_2-1\right)...\left(p_k-1\right)$
$= p^{e_1-1}p^{e_2-1}...p^{e_k-1}p_1\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...p_k\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$
$= p^{e_1}p^{e_2}...p_1^{e_k}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$
$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$.
Pour $n = 30$ on a: $30 = 2\times 3\times 5.0$
Donc
$\varphi(30) = 30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$
$= 30\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{5-1}{5}\right) = \frac{30}{30}(1)(2)(4) = 8$. Il y'a donc 8 nombres entre 1et 30 qui sont premiers avec le nombre 30. Ces nombres sont:$\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Exercice 4 On note par $\mathbb{Z}_n^\times$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_n$ inversibles par rapport la multiplication des classes c.à.d,
$\forall\overline{x}\in\mathbb{Z}_n^\times, \exists\overline{y}\ \mathbb{Z}_n^\times$ tel que: $\overline{x}\cdot\overline{y} = \overline{1}$ avec $\overline{1} = 1 + n\mathbb{Z}$.
Montrer que $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ est un groupe d'ordre $\varphi(n)$ d'élément neutre la classe $\overline{1}$. Ce groupe est appelé le groupe des unités de $\mathbb{Z}_n$ ou bien le groupe des éléments inversibles, par rapport à la multiplication des classes, modulo n.

Dérangements

Among the permutations of $\{1, 2, ..., n\}$ there are some called dérangements in which none of the integers appears in its natural place. Thus the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ i_1 & i_2 & . & . & . & i_n \end{pmatrix}$ noted by $(i_1, i_2, ..., i_n)$ is a derangement if $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 2$, ...,and $i_n \neq n$ (is it noted here that the notation $(i_1, i_2, ..., i_n)$ is not cyclic notation). Let D_n the number of derangements of $\{1, 2, ..., n\}$. As illustrations, we note that $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ because there is one derangement namely, $(2, 1)$; and $D_3 = 2$ because $(2, 3, 1)$ and $(3, 1, 2)$

are the only derangements in the set of the $3! = 6$ permutations of $\{1, 2, 3\}$. We want to derive a formula for D_n that is valid for each positive integer n using inclusion-exclusion principle. Let U be the set of $n!$ permutations of $\{1, 2, ..., n\}$. For each i, let A_i be the permutations $(b_1, b_2, ..., b_n)$ of $\{1, 2, ..., n\}$ such that $b_i = i$. Then the set of derangements is precisely the set $\overline{A_1 A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}$, therefore $D_n = \left|\overline{A_1 A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}\right|$.

The permutations in A_1 are all of the form $(1, b_2, ..., b_n)$ where $(b_2, ..., b_n)$ is a permutation of the set $\{2, 3, ..., n\}$. Thus $|A_1| = (n-1)!$. Similarly, $|A_i| = (n-1)!$.

Likewise, $A_1 \cap A_2$ is the set of permutations of the form $(1, 2, b_3, ..., b_n)$ so that $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$. For any integer k where $1 \leq k \leq n$, the permutations in $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ are of the form $(1, 2, ..., k, b_{k+1}, ..., b_n)$ where $(b_{k+1}, ..., b_n)$ is a permutation of the set $\{k+1, ..., n\}$. Thus $|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k| = (n-k)!$ and more generally, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ for $(i_1, i_2, ..., i_k)$ a k-combination of $\{1, 2, ..., n\}$.

Thus $|U| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| =$

$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + ... + (-1)^n C(n,n)$

$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!}$.

Then $D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$.

For example, $D_5 = 5! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right] = 44$.

Pour calculer encors une fois D_n, nous pourrons suivre une autre démonstration, mais cette fois ci, en utilisant une formule par récurrence.

Fixed-point theorems

A permutation is arrangement of the sequence $\{1, 2, ..., n\}$. Notons que dans cette section on note une permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & n \\ \pi(1) & . & . & . & \pi(n) \end{pmatrix}$ par $\pi = (\pi(1), ..., \pi(n))$, par exemple $(2, 3, 1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (il ne faut pas confondre avec la notation cyclique). We say that a permutation fixes k if k is in the k-th place. For instance $(1, 2)$ is a permutation of $\{1, 2\}$ which fixes both 1 and 2. The permutation $(2, 3, 1, 4)$ fixes only 4. Let $1 \leq k \leq n$ be a whole number. We say that a permutation $(x_1, ..., x_n)$ of $\{1, ..., n\}$ fixes k if $x_k = k$. We say that the permutation has at least 1 fixed point if the permutation fixes k for some $1 \leq k \leq n$. The permutation is a derangement if it has no fixed points.

The problem is to count the number of permutations with at least 1 fixed point, and the number of permutations without fixed points.

Let F_n= the number of permutations of $\{1, ..., n\}$ with at least 1 fixed point.

We must find F_2, F_3 and in general F_n for any number $n > 1$.

Example 5

Let $n > 1$ be a whole number. We count the number of derangements of $\{1, ..., n\}$.

Solution:

Let U be the set of all permutations of $\{1, ..., n\}$ and let FP_n be the set of permutations of $\{1, ..., n\}$ that have at least 1 fixed point. Then we have $n(U) = n!$ and $n(FP_n) = F_n$.

The complement of FP_n is the set FP'_n of all permutations of $\{1, ..., n\}$ that have no fixed points. Then by the complement formula

$n(FP'_n) = n(U) - n(FP_n) = n! - F_n$.

Then $n! - F_n$= The number of derangements of $\{1, ..., n\}$.

Problem

a/ Show that $F_2 = 1$ and $F_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (2! - F_2) + 1 = 4$.

b/ Prove that

$F_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} ((n-1)! - F_{n-1})$

$+ \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} ((n-2)! - F_{n-2})$

$+ ... + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} ((2)! - F_2) + 1.$

c/ Conclude that the number of derangements of $\{1, ..., n\}$ is

$n! - F_n = n! + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (F_{n-1} - (n-1)!)$

$+ \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (F_{n-2} - (n-2)!) + ... + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} (F_2 - 2!) - 1.$

d/ Find F_4 and the derangements of $\{1, 2, 3, 4\}$. Find F_5 and the derangements of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Le principe d'inclusion-exclusion peut être formaliser en termes de conditions ou bien de properiétés$\{c_1, c_2, ..., c_t\}$ que peuvent possèder ou bien vérifier certains éléments d'un ensemble fini $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Exemple 6

Soit UM l'ensemble des étudiants de l'université de M'sila avec $n = |UM|$.

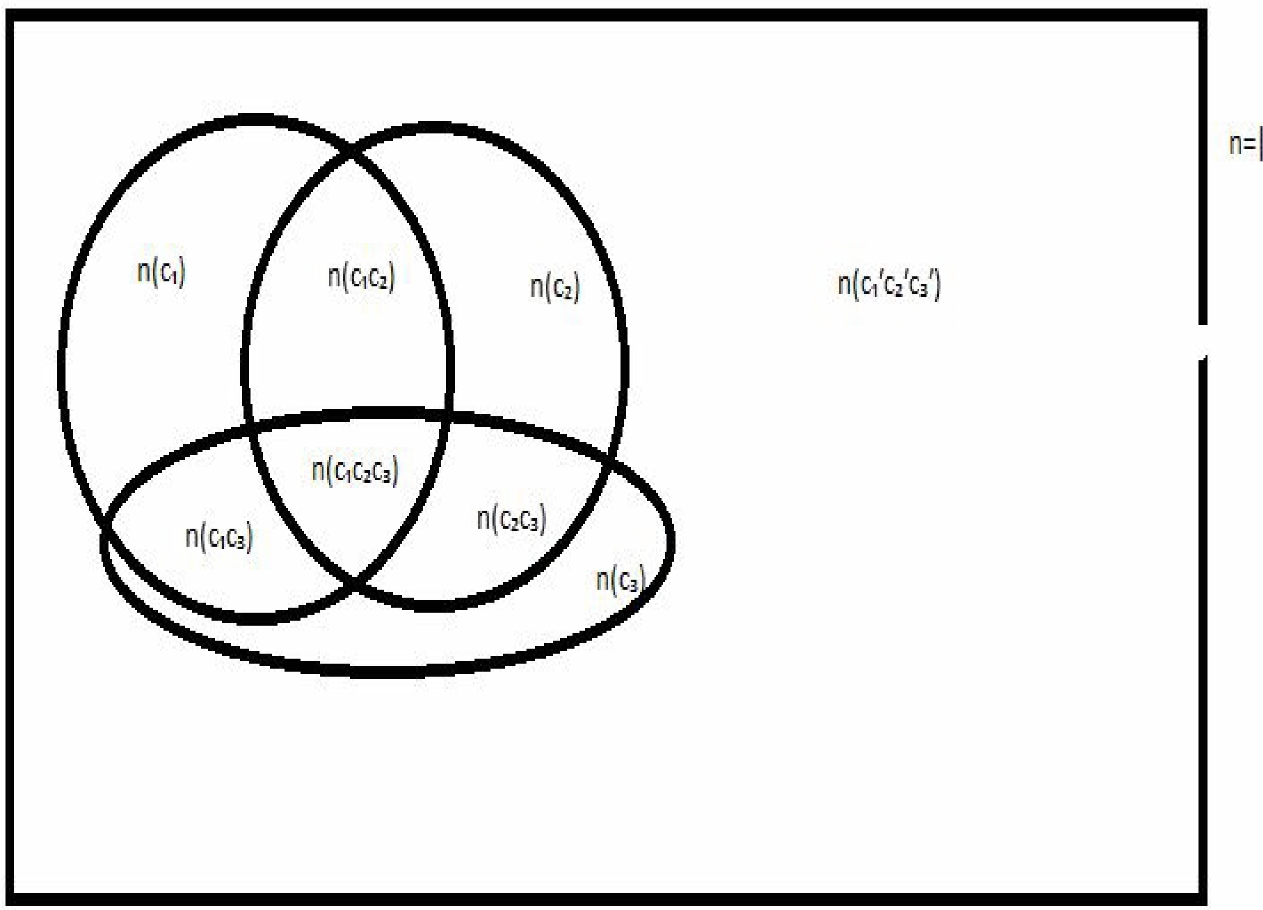
On considère, par exemple, les conditions suivantes :

c_1 : "l'etudiant x pratique le football ou bien le footboll", et on note par $n(c_1)$ le nombre des étudiants de UM qui pratiquent le football et par $n(c'_1) = n - n(c_1)$, le nombre des étudiants ne pratiquent pas le football.

c_2 :"l'etudiant x pratique le footing ", et par $n(c_2)$ le nombre des étudiants de UM qui pratiquent le footing et par $n(c'_2) = n - n(c_2)$ le nombre des étudiants de UM ne pratiquant pas le footing.

c_3 :"l'etudiant x pratique la natation ", et par $n(c_3)$ le nombre des étudiants de UM pratiquant la natation, et par $n(c'_3) = n - n(c_3)$ le nombre des étudiants de UM ne pratiquant pas la natation.

On note aussi par $n\left(c_1c_2\right)$ le nombre des étudiants pratiquant en meme temps le football et le footing. De même, on notera par $n\left(c_1'c_2'c_3'\right)$ le nombre des étudiants de UM qui ne pratiquent ni le football ni le footing ni la natation. On peut schématiser ces conditions par la figure ci-dessous.



Donnons une autre démonstration du principe d'inclusion-exclusion en utilisant les conditions (voir la référence 2).

Le cas général

Consider a set of n objects. Let $c_1, c_2, ..., c_r$ be a set of properties that these objects may have. In general, these properties are not mutually exclusive, that is an object can have one or more of these properties.

Let $n(c_1)$ denote the number of objects that have the property c_1 and let $n(c_2)$ denote the number of objects that have the property c_2,...., and let $n(c_r)$ denote the number of objects that have the property c_r. Notice that, an object having the property c_i is included in the count $n(c_i)$. If an object has both the properties c_i and c_j it will contribute a count in $n(c_i)$ as well as a count in $n(c_j)$. Let $n(c_i')$ denote the number of objects that do not have the property c_i. Let $n(c_i c_j)$ denote the number of objects that have both the properties c_i and c_j. Let $n\left(c_i' c_j'\right)$ denote the number of objects that have neither the property c_i nor the property c_j.

Considérons un ensemble de n objets. Soit c_1, c_2, ..., c_r un ensemble de propriétés ou bien conditions que ces objets peuvent avoir ou bien satisfaire . En général, un élément de cet ensemble peut avoir une ou plusieurs de ces propriétés et peut aussi ne posséder aucune de ces propriétés. Voir l'exemple sur l'université de M'sila, où un étudiant peut pratiquer 1 ou bien 2 ou bien 3 sports et peut aussi ne pas pratiquer aucun de ces activités.

Soit $n(c_1)$ le nombre d'objets qui ont la propriété $n(c_1)$ et soit $n(c_2)$ le nombre d'objets qui possédent la propriété c_2, ..., et $n(c_r)$ le nombre de objets qui ont la propriété c_r. Notons que si un objet possède à la fois les propriétés c_i et c_j, il contribuera au nombre $n(c_i)$ et contribuera aussi au nombre $n(c_j)$. Soit $n(c_i') = n - n(c_i)$ le nombre d'éléments qui ne possèdent pas la propriété c_i. Soit $n(c_i c_j)$ le nombre d'éléments qui ont à la fois les propriétés c_i et c_j. Soit $n\left(c_i' c_j'\right)$ le nombre d'éléments qui n'ont ni la propriété c_i ni la propriété c_j. Soit $n(c_i' c_j)$ le nombre d'éléments ayant la propriété c_j mais ne possédant pas la propriété c_j. On a donc $n(c_i' c_j) = n(c_j) - n(c_i c_j)$ (les éléments qui possédent la propriété c_j mais ne possédant pas la propriété c_i). De la même façon, on peut écrire:

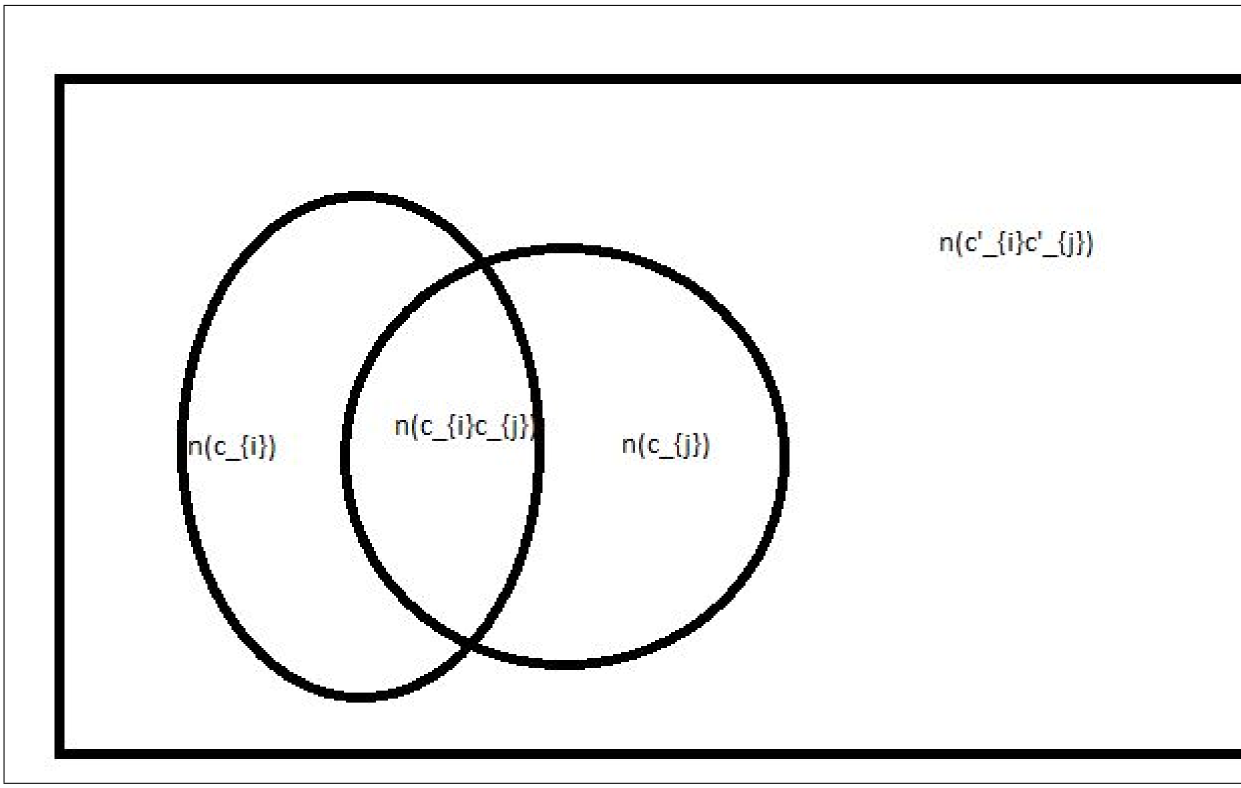
$$n\left(c_i' c_j'\right) = n - n\left(c_i c_j'\right) - n(c_i' c_j) - n(c_i c_j)$$
$$= n - \left(n\left(c_i c_j'\right) + n(c_i c_j)\right) - \left(n(c_i' c_j) + n(c_i c_j)\right) + n(c_i c_j)$$
$$= n - n(c_i) - n(c_j) + n(c_i c_j).$$

En général, on a:

$$n(c_1' c_2' ... c_r') = n - n(c_1) - n(c_2) - ... - n(c_r)$$
$$+ n(c_1 c_2) + n(c_1 c_3) + ... + n(c_{r-1} c_r)$$
....
$$+ (-1)^r n(c_1 c_2 ... c_r)$$
$$= n - \sum_{i=1}^{r} n(c_i)$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} n(c_i c_j)$$
$$- \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} n(c_i c_j c_k)$$
$$+ ... + (-1)^r n(c_1 c_2 ... c_r).$$

Exercice 6 Faire la démonstration de ce résultat par récurrence sur le nombre r de conditions que peuvent posséder les éléments d'un ensemble E contenant un nombre n d'éléments.

Le schéma ci-dessous montre une illustration de cette formule.



Appliquons la formule d'inclusion-exclusion pour calculer le nombre de surjections

d'un ensemble A de cardinal m vers un ensemble B de cardinal n avec $m \geq n$. Il faut noter ici, si $m < n$, alors on ne peut avoir un surjection entre l'ensemble A vers l'ensemble B, car il y'a $n - m > 0$ éléments de l'ensemble B qui n'admettent pas d'antécédents. Soit donc, $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ avec $m \geq n$. Notons aussi par S l'ensemble de toutes les applications $f : A \longrightarrow B$. Soit $S_0 = |S| = n^m$. Pour $1 \leq i \leq n$, on note par c_i la condition :"l'élément b_i n'a pas d'antécédent" ce qui revient au même de dire que l'élément b_i n'est pas l'image de toute application de A vers B. Dans ce cas, $n\left(c_i'\right)$ est le nombre des fonctions dans S qui admettent b_i comme image, et note aussi par $n\left(c_1'c_2'...c_n'\right)$ le nombre de fonctions surjectives de l'ensemble A vers l'ensemble B, c.à.d, le nombre d'applications où chaque élément de l'ensemble d'arrivée B, admet au moins un antécédent.

On a pour tout $1 \leq i \leq n$, $n(c_i) = (n-1)^m$. On a ce résultat parce que , car chaque element de B, à l'excéption de b_i, peut être utilisé comme image d'une fonction $f : A \longrightarrow B$, et par suite on a: $imf = f(A) = |B| - 1 = n - 1$.
De même, pour toutes $1 \leq i < j \leq n$ il y'a $(n-2)^m$ applications $f : A \longrightarrow B$ qui admettent ni b_i ni b_j comme images. Soit donc, $S_1 = n(c_1) + n(c_2) + ... + n(c_n) = n(n-1)^m$.

$S_2 = n(c_1 c_2) + n(c_1 c_3) + ... + n(c_{n-1} c_n) = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (n-2)^m$.

D'une manière générale, on a: pour tout $1 \leq k \leq n$, $S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} n(c_{i_1} c_{i_2} ... c_{i_k}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (n-k)^m$.

Par conséquent, le nombre d'applications surjectives de l'ensemble A vers l'ensemble B est $n(c'_1 c'_2 ... c'_n) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + ... + (-1)^n S_n$

$$= n^m - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (n-1)^m + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (n-2)^m - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (n-3)^m + ... + (n-n)^m$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (n-i)^m = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix} (n-i)^m.$$

Voir la référence 3 pour plus d'exemples.

Exercice 7 *In how many ways can the 26 letters of the alphabet be permuted so that none of the patterns car, dog, pun,or byte occurs.*

Réferences

1/ Jacques Vélu Méthodes mathématiques pour l'informatique, Dunod.

2/ C.L. LIU,Introduction to combinatorial Mathematics Mc Graw-Hill Book Company.

3/ Raplh P. Grimaldi, Discrete and combinatorial mathematics, Pearson Addison Wesley0 (5ed).