0.1 l'image de la dérivée

Theorem 1 *Si* $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ *alors*

1) $\dfrac{df}{dt} \longleftrightarrow G(s) = -f(0) + sF(s)$

2) $\int_0^t f(x)dx \longleftrightarrow G(s) = \dfrac{F(s)}{s}$.

3) $\dfrac{f(t)}{t} \longleftrightarrow G(s) = \int_s^{+\infty} F(x)dx$ avec $\lim\limits_{t0} \dfrac{f(t)}{t} < +\infty$

4) $F^{(n)}(s) \longleftrightarrow (-1)^n \, t^n f(t)$

Remark 2 *de (1) on tire*

a) $\dfrac{d^2f}{dt^2} \longleftrightarrow G(s) = -\dfrac{df(0)}{dt} - sf(0) + s^2F(s)$

b) $\dfrac{d^3f}{dt^3} \longleftrightarrow G(s) = -\dfrac{d^2f(0)}{dt^2} - s\dfrac{df(0)}{dt} - s^2f(0) + s^3F(s)$.

Example 3

1)Trouver l'origine de $F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s \longleftrightarrow f(t)$

comme $\left\{ \begin{array}{c} F'(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \longleftrightarrow g(t) = \sin t \\ \text{on sait que } F'(s) \longleftrightarrow -tf(t) \end{array} \right.$ le theorème del'unicité nous donne

$F(s) = \arctan s \longleftrightarrow f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

2) $F(s) = \log \dfrac{s-a}{s-b} \longleftrightarrow f(t)$

on a $F'(s) = \dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s+b} \longleftrightarrow e^{at} - e^{-bt} = -tf(t)$ alors alors $f(t) = -\dfrac{e^{at} - e^{-bt}}{t}$

3) calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{t} dt$ on utilisant la formmule2 du theorème

$I = \lim\limits_{s0} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{t} e^{-st} dt$ *alors* si $f(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{t}$ elle a pour image $-\log \frac{s-2}{s-3}$ donc $I = -\lim\limits_{s0} \log \dfrac{s-2}{s-3} = \log \frac{3}{2}$.

Exercise 4 *trouver l'origine de* $F(s) = \log \dfrac{s^2+1}{s^2+3}$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(s+1)$

Exercise 5 *Calculer la valeur de* $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$,

Exercise 6 *résoudre l'equation différentielle suivante*

a)$\left\{ \begin{array}{c} y' + y = e^{-t} \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$, b) $\left\{ \begin{array}{c} y'' + 2y = e^{-t} + \sin 2t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{array} \right.$, c) $\left\{ \begin{array}{c} y'' + 2y = e^{-t} + \sin 2t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} y' + ty = te^{-t} \\ y(0) = a \in IR \end{array} \right.$.