Chapitre 01 : Rappels mathématiques sur les nombres Complexes

I.1 Définition

Un nombre complexe z est un couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera : $x + jy$ avec : $j^2 = -1$

$z = x + jy$: est l'écriture algebrique (cartésienne) de z

* Le réel x est la partie réelle de z noté : $Re(z)$.
* Le réel y est la partie imajinaire de z noté : $Im(z)$.

(Fig-1)

I.2 Opérations :

Si $z = x+jy$ et $z' = x'+jy'$ sont deux nombres complexes alors :

- $z + z' = x + x' + j(y + y')$
- $zz' = xx' - yy' + j(xy' + x'y)$

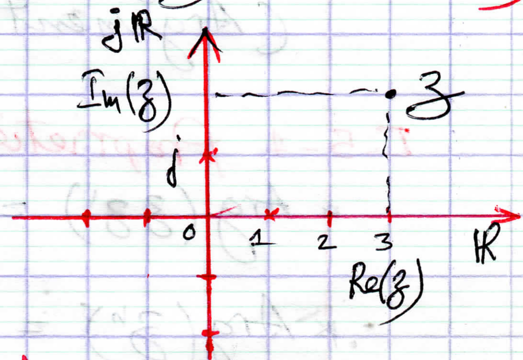

Fig-1-

I.3 Conjugué d'un nombre complexe :

On appelle conjugué de z et noté $\bar{z}$ le nombre complexe :

$$\bar{z} = x - jy$$

I.4 Module d'un nombre complexe :

Le module de $z = x + jy$ est le réel positif :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$ se qui implique :

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

I.4.1 Propriétés : z et $z' \in \mathbb{C}^2$

* $|zz'| = |z|\,|z'|$; $\forall n \in \mathbb{Z}$: $|z^n| = |z|^n$
* $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$.

I-5 Argument d'un nombre complexe

pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z| (\cos\theta + j\sin\theta)$ est appelé argument

de z et noté $\theta = \arg(z)$. Cet argument est défini modulo 2π.

On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition : $\theta \in]-\pi, \pi]$ (Argument principal). fig -2-

I-5-1 Propriétés z' et $z \in \mathbb{C}^2$:

* $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \mod (2\pi)$

* $\mathrm{Arg}(z^n) = n \arg(z) \mod (2\pi)$

* $\mathrm{Arg}(1/z) = -\arg(z) \mod (2\pi) \quad (z \neq 0)$
* $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\arg(z) \mod (2\pi)$.

I-6 Forme polaire (trigonométrique) :

Soit $z = x + jy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Il existe un couple (r, θ) de réels tel que ;
$r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Donc : $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

Cette dernière écriture est la forme trigonométrique ou polaire d'un nombre complexe z.

Et : $z = r\angle\theta$: est sa courte écriture

I-7 Formules de Moivre ; notation exponentielle

La formule de Moivre est :

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

La notation exponentielle est : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
et donc tout nombre complexe s'écrit :

$$z = re^{j\theta} \quad \text{(Forme exponentielle)}$$

où : $r = |z|$ est le module et
$\theta = \arg(z)$ est un argument
(Fig-2-)

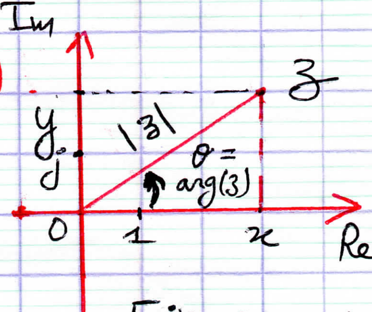

Fig-2-

I-7.1 Propriétés :

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z = re^{j\theta}$, $z' = r'e^{j\theta'}$

$$zz' = rr'e^{j(\theta+\theta')}$$

$$z^n = (re^{j\theta})^n = r^n(e^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta} \quad (z \neq 0) \; ; \; \bar{z} = re^{-j\theta}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{j\theta}}{r'e^{j\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{j(\theta-\theta')} \quad (z' \neq 0)$$

* La formule de Moivre se réduit à :

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$$

I-8 Formules d'Euler :

pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \; ; \; \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

I.9 Application à l'électricité des NC.

Exemple :
Voir le TD N° 01 exercice 03