CHAPITRE 2

Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité

2.1. Introduction au Circuit électrique

Un circuit électrique est composé au minimum d'un générateur et d'un récepteur (résistance, bobine, condensateur, lampe, moteur…) et des fils de liaison. Le générateur est la source d'énergie.

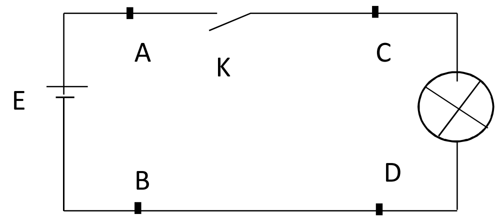


Figure .a.

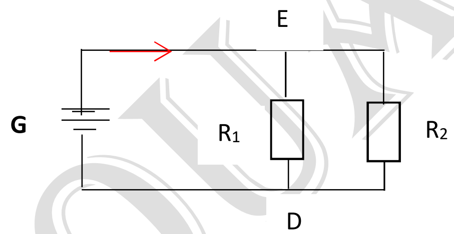


Figure .b.

Pour la résolution des circuits électriques, c'est-à-dire définir le courant dans chaque branche), il suffit d'utiliser les lois d'électricité, Lois d'Ohm ; loi des mailles, loi des nœuds, théorème de thevenin….

La source d'énergie ; Générateur de tension ou Générateur de courant peut être continu (constant) ou sinusoïdale (variable).

2.2 Régime continu

On appelle régime continu, un régime dans lequel les intensités des courants électriques, à travers les différentes branches du circuit, ont une valeur constante.

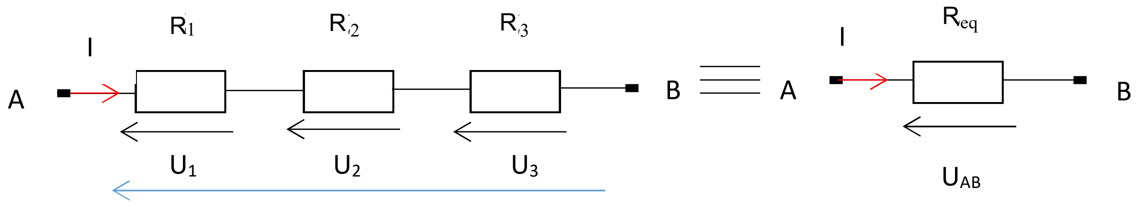
2.2.1 Notion de dipôle

Un dipôle est un composant électrique possédant deux pôles. Il est caractérisé par deux grandeurs électriques : U et I. Il y'a Différents types de dipôles :

- Dipôles actifs : c'est l'équivalent d'une source d'énergie (courant ou tension) GENERATEUR.
- Dipôles passifs : décrivent des phénomènes physiques (Résistance, condensateur et bobine).

2.2.2 Association des dipôles

A. Association en Série : *un couplage série est un couplage de deux (ou plus) composants parcourus par le même courant*



Loi d'Ohm : $U_1 = R_1.I$, U_{AB} $U_3 = R_3.I$

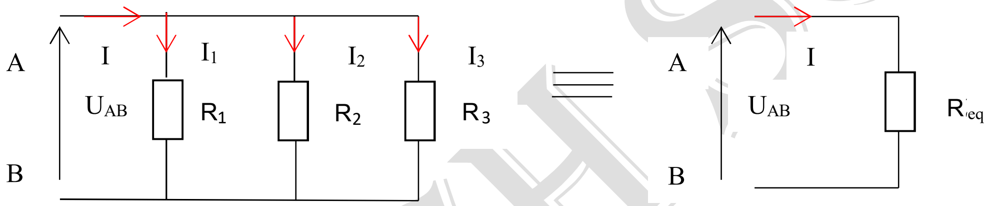
Il vient : $U_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3).I = R_{eq}.I \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n$

Exemple 1 :

Calculer la résistance équivalente de deux résistances R_1= 200Ω et R_2= 100Ω placées en série.

R_t= R_1+ R_2= 200+100=300Ω

B. Association en Parallèle : *un couplage parallèle est un couplage de deux (ou plus) composant reliés à chacune de leurs extrémités aux mêmes potentiels*



En effet $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3} \Longrightarrow U_{AB} \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = I = \frac{U_{AB}}{R_{eq}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \frac{1}{R_n}$$

Exemple 2 :

Calculer la résistance équivalente de deux résistances R_1= 200Ω et R_2= 100Ω placées en parallèles.

R_t= R_1//R_2 alors $\frac{1}{Rt} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ donc $R_t = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{200\times100}{200+100} = 66{,}66\Omega$

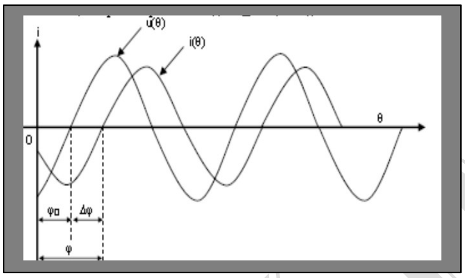
2.3 Régime harmonique (Sinusoïdal)

On appelle régime sinusoïdal (ou régime harmonique) l'état d'un système pour lequel la variation dans le temps des grandeurs le caractérisant est sinusoïdale. Le circuit électrique, dans ce cas, est alimenté par une tension alternative sinusoïdale V(t) et parcouru par un courant alternatif sinusoïdal i(t).

2.3.1. Courant alternatif

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant bidirectionnel périodique. Il en est de même pour une tension alternative sinusoïdale.

Tension : $u(t) = U_M \sin(\omega t + \phi_u)$ et Courant, $i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi_i)$



Avec: u(t) Valeur instantanée, U_M Valeur maximale(V);

$(\omega t + \phi)$ Phase instantanée (rd); (ω) Pulsation.

(ϕ_u) et (ϕ_i) Déphasage par rapport à l'origine de phase ;

$\Delta\phi = \phi_u - \varphi_i$ est le déphasage entre le courant et la tension.

2.3.2 Valeurs moyennes et efficaces du courant sinusoïdal

Soit: $i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$

Intensité moyenne :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_M \sin\ \omega t\ dt = \frac{I_M}{T}\left[\frac{-\cos\omega t}{\omega}\right]_0^T = -\frac{I_M}{T\omega}[\cos\omega t - \cos 0]$$

$$= -\frac{I_M}{2\pi}[1-1] = 0$$

Intensité efficace : $I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I^2(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_M^2 \sin^2\omega t\ dt$

$= \frac{2I_M^2}{T}\int_0^{T/2}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt = \frac{2I_M^2}{2T}\left[t - \frac{\sin}{2\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_M^2}{2}$ Alors $I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

De meme pour la tension : $U_{eff} = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$

Exemple 3 : Soit un courant alternatif i(t)= $12\sin(314t + \frac{\pi}{3})$

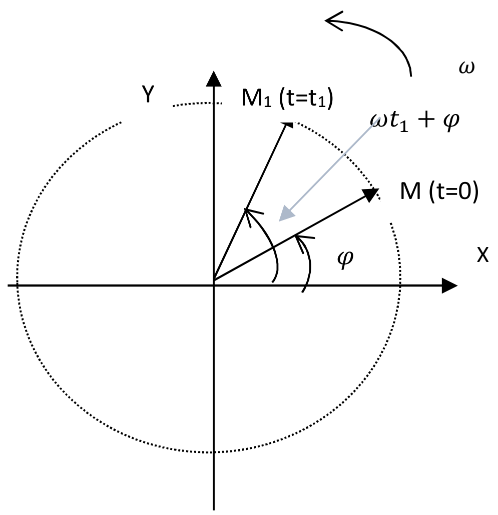
Donner la valeur maximale, la valeur efficace, la pulsation, la période, la fréquence et la valeur moyenne.

$I_{Max} = 12A, I_{eff} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8.48A, \omega = 314\ rad/s, T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.02\ s,\ f = \frac{1}{T} = 50Hz, I_{Moy} = 0$

2.3.3 Représentation de Fresnel :

Soit le signal : $S(t) = S_M \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}S_{eff}\sin(\omega t + \varphi)$ qui peut être une tension ou un courant

Ce signal peut être représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module S_{eff} placé par rapport à l'axe (OX) origine des phases, tel que $\varphi = angle\ entre\ l'axe(OX) et\ le\ vecteur\ \overrightarrow{OM}$.



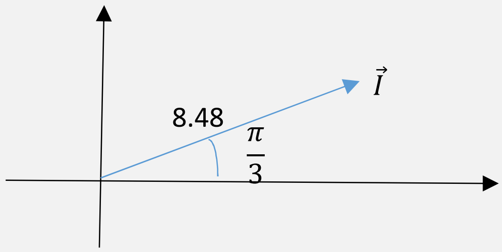
Représentation de Fresnel

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tourne avec une vitesse ω constante dans le sens trigonométrique, L'intérêt de la représentation de Fresnel c'est de séparer la partie temporelle (ωt) de la partie de phase (ϕ).

2.4 Notation complexe et impédances

2.4.1 Loi d'Ohm en régime sinusoïdal

Exemple 4 : Faites la Représentation de Fresnel du courant alternatif i(t)= $12 sin(314t + \frac{\pi}{3})$



Soit une impédance Z parcourue par un courant I et présente à ses bornes une tension U, Alors ces trois grandeurs sont liées par la loi d'ohm suivante :

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \quad \underline{I} = \underline{Y} \times \underline{U}$$

2.4.2 Détermination des impédances des dipôles élémentaires (RLC)

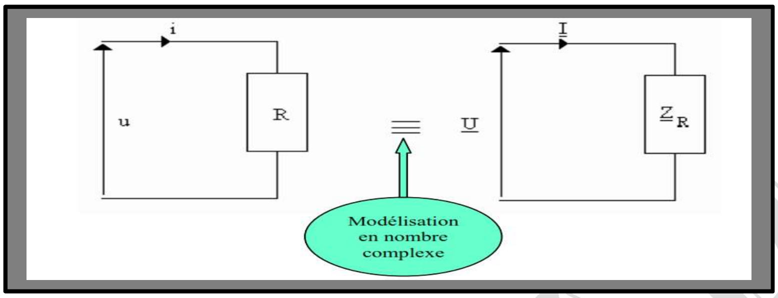
Soient

La Tension : $u(t) = U_M \sin(\omega t + \phi_u)$

et Courant, $i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi_i)$

On peut leur associer des nombres complexes sous forme $\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$ et $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$

A. Cas d'une résistance ohmique :



La loi d'ohm u(t)=R i(t) alors $i(t) = \frac{u(t)}{R}$

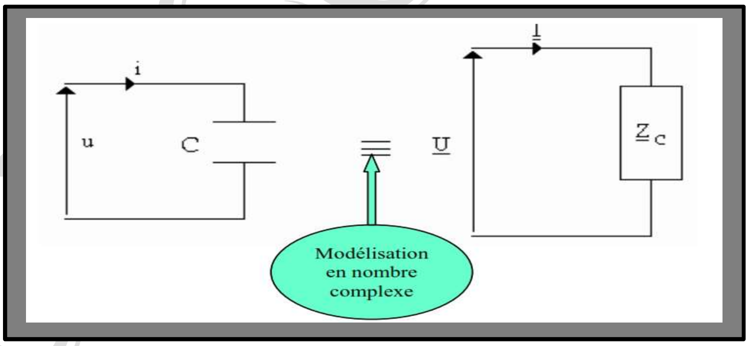
$i(t) = \frac{U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u)}{R}$

$i(t) = \frac{U}{R}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$ $\underline{I} = \frac{U}{R}e^{j\varphi_u}$

Donc $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{\frac{U}{R}e^{j\varphi_u}} = Re^{j0}$ donc $\underline{Z}_R = R \; et \arg(\underline{Z}_R) = 0$

L'impédance résistive est purement réelle. La tension et le courant sont en phase.

B. Cas d'un condensateur :



$u(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt \;\; alors \; i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$

$i(t) = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)$

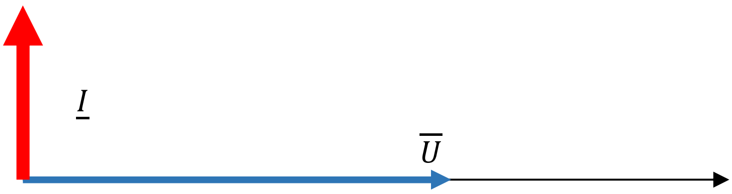
$= C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{I} = C\omega Ue^{j(\varphi_u+\frac{\pi}{2})}$

Donc $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{C\omega Ue^{j\varphi_u+\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ Alors $\underline{Z_c} = -j\frac{1}{C\omega} \; et \arg\left(\underline{Z_c}\right) = -\frac{\pi}{2} = \varphi_c$

L'impédance capacitive est imaginaire pure de réactance capacitive $X_C = \frac{-1}{C\omega}$

Le courant est en quadrature en avance par rapport à la tension donc $\underline{U} = -j\frac{1}{C\omega}\underline{I}$



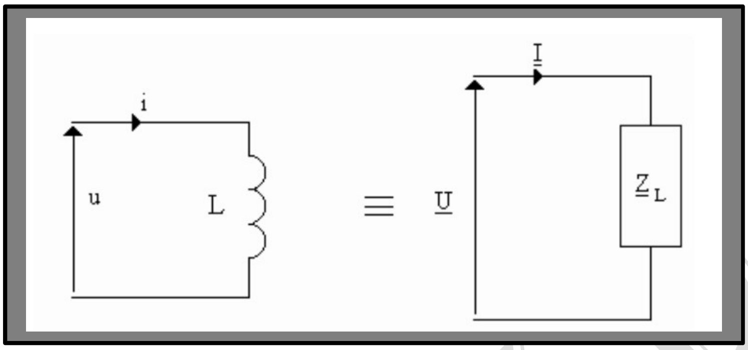
C. Cas d'une Bobine :

$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ alors $i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt$

$i(t) = -\frac{1}{L\omega}U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{1}{L\omega}U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)$ donc $\underline{I} = \frac{U}{L\omega}e^{j(\varphi_u-\frac{\pi}{2})}$

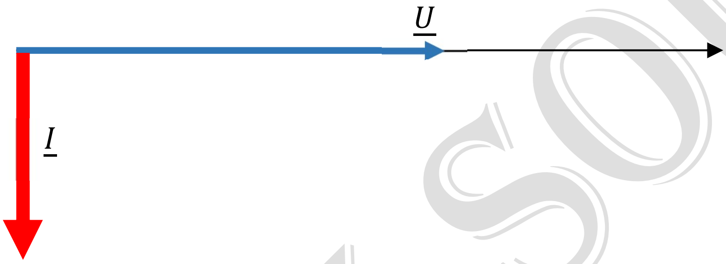
Donc $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi u}}{\frac{1}{L\omega}Ue^{j(\varphi u - \frac{\pi}{2})}} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\underline{Z}_L = jL\omega \; et \; \arg(\underline{Z}) = \frac{\pi}{2}$



L'impédance d'une bobine est purement inductive de réactance inductive $X_L = L\omega$ (Ω).

Le courant est en quadrature en avance de la tension de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$



REMARQUE

$\underline{Z} = |Z|e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi} = R + jX$

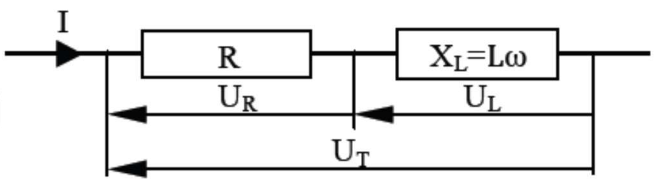
- Si X =0 **L'impédance est résistive** et $\boldsymbol{\varphi = 0}$
- Si R =0 et X >0 **L'impédance est purement inductive** et $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$
- Si R =0 et X <0 **L'impédance est purement capacitive** et $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

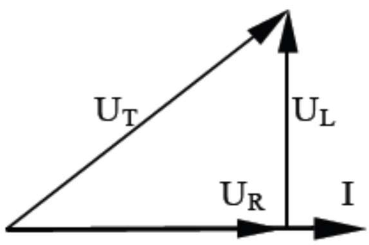
2.4.3 Circuit série RL

Dans un circuit série, c'est le courant qui est commun.

Prenons-le comme référence.

$U_T = U_R + U_L$, $U_T = R.I + jX_L I = R.I + jL\omega I = Z.I$ Avec : $Z = R + jL\omega$





Le courant est en retard par rapport à la tension

Exemple : Soit un circuit RL dont le courant efficace est I=1A. R=100Ω, L=38.6mH, f=50Hz.

Déterminer les valeurs efficaces U_R, U_L et U_t et le déphasage correspondant.

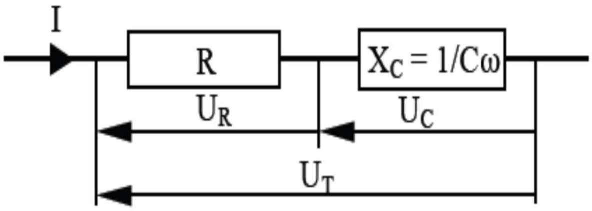
U_R=R.I=100*1=100V en phase avec le courant ;

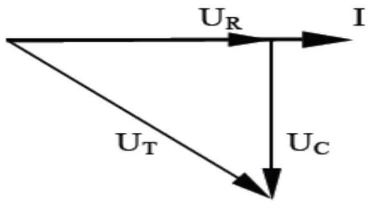
$U_L = L.\omega.I = 38.6 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 50 = 12.12V$ Déphasé de π/2 en avance par rapport au courant.

Donc $\vec{U}_T = \vec{U}_R + \vec{U}_L = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$ =100.73V Déphasé de $\varphi = arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 7°$ en avance par rapport au courant

2.4.4 Circuit série RC

De même $U_T = U_R + U_C$, $U_T = R.I + jX_C I = R.I - \frac{j}{c\omega} I = Z.I$ avec $Z = R - \frac{j}{c\omega}$





Le courant est en avance par rapport à la tension

Exemple : Soit un circuit RC dont le courant efficace est I= 1A. R=100Ω, C=35µF, f=50Hz

Déterminer les valeurs efficaces de U_R, U_L et U_t et le déphasage correspondant.

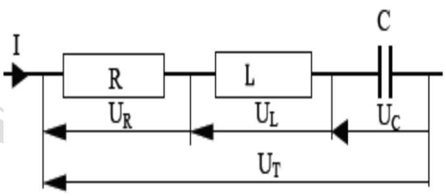
U_R=R.I=100*1=100V en phase avec le courant ;

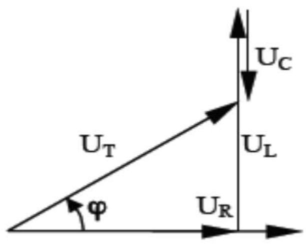
$U_C = \frac{1}{C\omega} I = \frac{1}{35\times10^{-6}\times2\pi\times50} = 90.95V$ Déphasé de π/2 en arrière par rapport au courant.

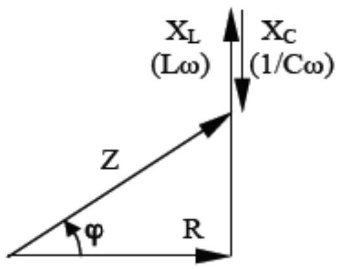
Donc $\vec{U}_T = \vec{U}_R + \vec{U}_C = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$ =135.17V Déphasé de $\varphi = arctg\left(\frac{1/c\omega}{R}\right) = 42.3°$ en arrière par rapport au courant.

2.4.5 Circuit série RLC

$U_T = U_R + U_L + U_C = R.I + jL\omega - \frac{j}{c\omega} I$







Z : L'impédance du circuit et vaut :$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right), |Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

Exemple 1 :

Une résistance de 25 Ω, un condensateur de 10 µF et une bobine d'inductance 0,1H qui possède une résistance interne de 12 Ω sont connectés en série. Déterminer pour une fréquence de 50 Hz :

1. L'impédance de la bobine et l'impédance du condensateur.
2. Le module de l'impédance du circuit global.
3. Quelle est la nature de la charge.

1. $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314\, rd/s$

Bobine : $X_L = 314 \times 0,1 = 31,4\ \Omega$ et $Z_B = r + jX_L = 12 + 31,4j$

Condensateur : $X_c = \frac{1}{\omega C} = 318,47\Omega,\ Z_c = -318,47j\ \Omega$

2. **Circuit RLC**

$$Z_t = Z_R + Z_B + Z_C = 25 + 12 + 31,4\, j - 318,47\, j = (37 - 287,07j)\ \Omega$$

$$|Z_t| = \sqrt{37^2 + 287,07^2} \quad = 289,44\Omega$$

3. **La charge est capacitive car X=-287.07<0 .**

Exemple 2 :

Dans le cas d'un circuit RLC série comportant une résistance de 200Ω, un condensateur de capacité 10 µF et une bobine d'inductance 20 mH.

1. Calculer son impédance pour une fréquence de 50 Hz.
2. Calculer le courant efficace dans le circuit pour une tension sinusoïdale de valeur maximale 300 V.

1. $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314\, rd/s$

$Z_R = 200\Omega,\ X_c = \frac{1}{\omega C} = 318\Omega,\ Z_c = -318j\ \Omega \quad X_L = \omega L = 6,3\Omega,\ Z_L = 6,3\, j\ \Omega$

$Z_t = Z_R + Z_L + Z_C = 200 + 6,3\, j - 318\, j = (200 - 312j)\ \Omega$

2. $U_{Max} = 300V \qquad U_{eff} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 212\ V$ **Alors** $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|Z|} = \frac{212}{\sqrt{200^2+312^2}} =$ **0.54 A**

1. Cas Particulier

Le Dipôle	Impédance (Ω)	Déphasage φ	P(W)	Q(VAR)	S(VA)	Nature du circuit
Résistance R(Ω)	$\underline{Z}_R = R$	Le courant en phase avec la tension $\varphi = 0$	$P = UIcos\varphi = RI^2$	Q=0	$S = P$	Impédance purement résistive
Bobine parfaite L(H)	$\underline{Z}_L = jL\omega$	Le courant en retard de 90°par rapport à la tension $\varphi = +\frac{\pi}{2}$	P=0	$Q = UIsin\varphi = L\omega I^2 > 0$	$S = Q$	Impédance purement inductive
Condensateur parfait C(F)	$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{C\omega}$	Le courant en avance de 90° par rapport à la tension $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	P=0	$Q = U.Isin\varphi = -\frac{I^2}{C\omega} < 0$	$S = \lvert Q \rvert$	Impédance purement capacitive

2. Cas Général

Impédance $\underline{Z} = R + jX$	Phase φ	Déphasage φ	P(W)	Q(VAR)	S(VA)	Nature du circuit
R≠ 0 , $X > 0$	$arctg\left(\frac{X}{R}\right)$ $\varphi > 0$	Le courant en retard par rapport à la tension de φ	$P = UIcos\varphi$	$Q = UIsin\varphi$ Q>0	$\sqrt{P^2 + Q^2}$	Impédance Inductive
R≠ 0, $X < 0$	$arctg\left(\frac{X}{R}\right)$ $\varphi < 0$	Le courant en avance par rapport à la tension de $\lvert\varphi\rvert$	$P = UIcos\varphi$	$Q = UIsin\varphi$ Q<0	$\sqrt{P^2 + Q^2}$	Impédance capacitive
R ≠ 0 $X = 0$	$\varphi = 0$	Le courant en phase avec la tension	$P = UI$	$Q = 0$	S=P	Impédance purement résistive
R= 0 , X>0	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	Le courant en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension	$P = 0$	$Q = UI$	S=Q	Impédance purement inductive
R= 0 , X<0	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	Le courant en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension	$P = 0$	$Q = -UI$	$S = \lvert Q \rvert$	Impédance purement capacitive

2.5 Puissances électriques

On distingue plusieurs types de puissances.

Puissance instantanée : C'est le produit entre courant et tension instantanés :

$$p(t)=u(t)\times i(t)=U_M\sin(\omega t)\times I_M\sin(\omega t+\varphi)=U_M.I_M((\cos(\varphi)-\cos(2\omega t+\varphi))\frac{1}{2}$$
$$=U_{eff}.I_{eff}(\cos(\varphi)-U_{eff}.I_{eff}\cos(2\omega t+\varphi))$$

Puissance fluctuante : C'est la partie variable de la puissance instantanée :

$$P(t)=U_{eff}.I_{eff}\cos(2\omega t+\varphi)$$

Puissance active. C'est la valeur moyenne de la puissance instantanée qui correspond à un travail physique effectif, son unité est le *Watt* (W).

$$P=U_{eff}.I_{eff}\cos(\varphi)$$

Puissance réactive. C'est la puissance sans effet physique en termes de travail qui correspond à la partie « réactive » du courant. Q = $U_{eff}.I_{eff}\sin(\varphi)$

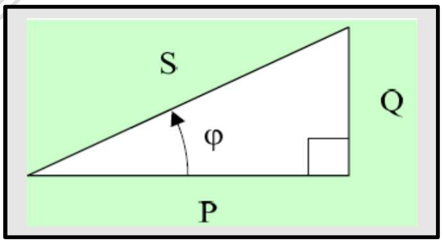
Puissance apparente. S= $U\times I$, $\underline{S}=P+jQ$ et $S=\sqrt{P^2+Q^2}$

Facteur de puissance. Le facteur de puissance $cos\varphi$ est le rapport de la puissance active sur la puissance apparente $cos\varphi=\frac{P}{S}$

Relation entre les puissances :

D'après le triangle des puissances

$cos\varphi=\frac{P}{S}, sin\varphi=\frac{Q}{S}, tan\varphi=\frac{Q}{P}$

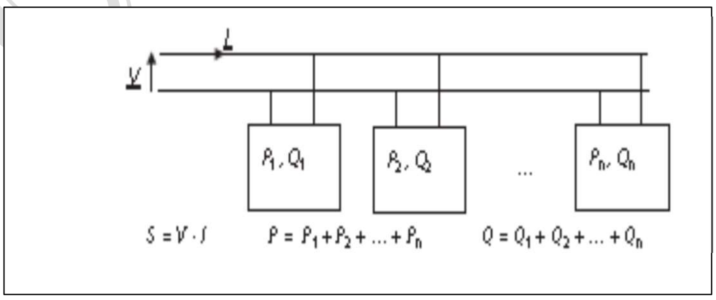


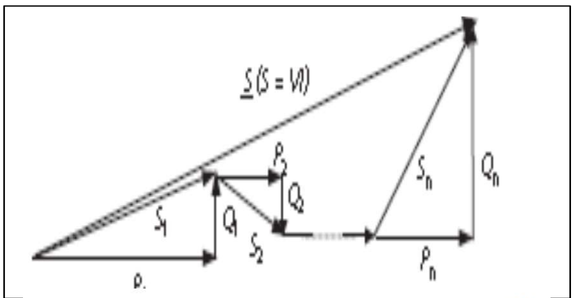
2.5.1 Théorème de Boucherot.

La puissance active d'un système est la somme des puissances actives des éléments le constituant, de même pour la puissance réactive. En revanche, c'est faux en ce qui concerne la puissance apparente.

Remarque : le théorème de Boucherot ne s'applique pas à la puissance apparente.

$S\neq\sum_i S_i$ Il faut utiliser la relation :$S=\sqrt{P^2+S^2}$





Exercices d'applications

Exercice 1

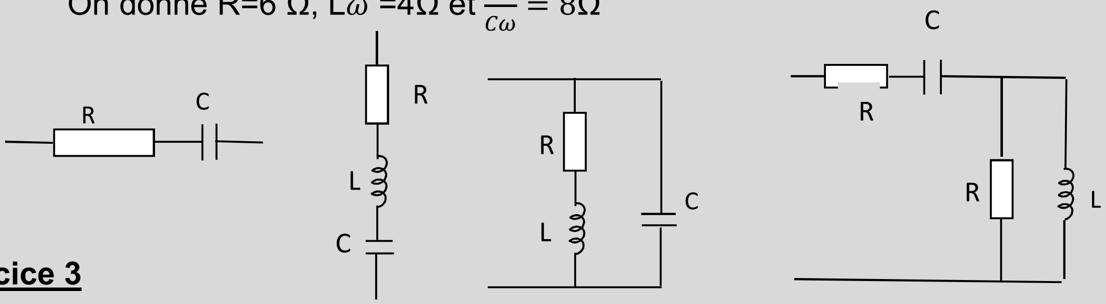
On donne les impédances : $\overline{Z_1} = -j1500$, : $\overline{Z_2} = \left[30;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\overline{Z_3} = 10$, f=50Hz. Identifier les composants élémentaires correspondants et calculer les valeurs de ces éléments.

Exercice 2

Pour chaque circuit, calculer

1. L'impédance complexe équivalente des circuits ci-dessous.
2. En déduire leur nature ainsi que le déphasage entre tension et courant.
3. Faites la représentation de Fresnel des tensions et des courants U et I. (en suppose les tensions à l'origine des phases).

   On donne R=6 Ω, Lω =4Ω et $\frac{1}{C\omega} = 8\Omega$

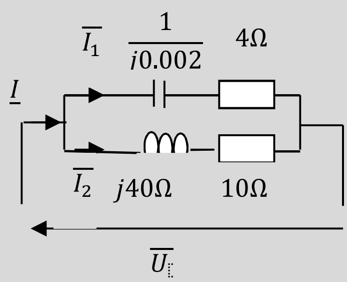


Exercice 3

Du circuit représenté ci-contre, on ne connait que

la valeur du courant total absorbé : I=2.5 A ainsi que

les valeurs des impédances notées sur la figure.



1) Calculer la valeur de la tension efficace U appliquée à cette charge.

2) En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

3) Représenter les grandeurs sur le diagramme de Fresnel.

4) Calculer la puissance active, réactive et apparente.

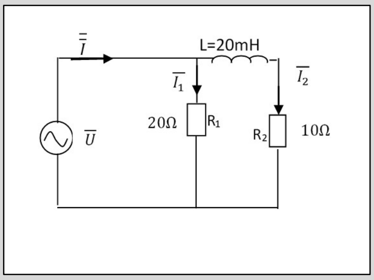
Quelle est la nature de ce récepteur. Calculer les éléments du circuit le plus simple équivalent à cette charge

Exercice 4

On considère la charge monophasée représentée

sur la figure ci-contre et placée sous une tension

sinusoïdale de valeur efficace U_{eff} = 230V, f=50Hz.



1) Calculer la valeur efficace I_1 du courant circulant dans R_1
2) Calculer la valeur efficace I_2 du courant circulant dans R_2.
3) Calculer la valeur efficace I absorbé par l'ensemble de ce circuit.