

Quadripôles électriques

1 – Définition des quadripôles

De nombreux circuits peuvent être représentés par une « boîte » munie de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie, que l'on nomme quadripôle¹.

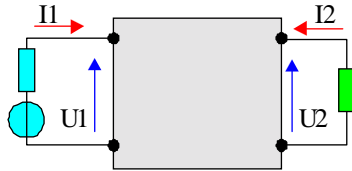


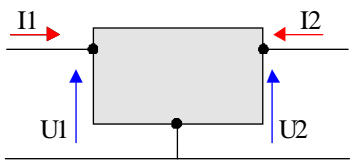
Fig. 1

Il est souvent possible de décomposer un dispositif électrique ou électronique complexe en un ensemble de modules fonctionnels qui sont des quadripôles. Ces modules sont ensuite associés en cascade : les grandeurs de sortie de l'un constituent les grandeurs d'entrée du suivant.

L'étude des quadripôles linéaires est facilitée par l'usage du calcul matriciel. Cette représentation des circuits est également bien adaptée aux méthodes de calcul numérique modernes.

Quatre grandeurs électriques caractérisent un quadripôle : le courant I_1 et la tension U_1 d'entrée, le courant I_2 et la tension U_2 de sortie. Par convention, on donne le sens positif aux courants qui pénètrent dans le quadripôle.

CAS PARTICULIER : Le tripôle



Une borne d'entrée est alors commune avec une borne de sortie. Les transistors sont modélisables par des tripôles.

Fig. 2

2 – Exemples de quadripôles

□ – Quadripôle série

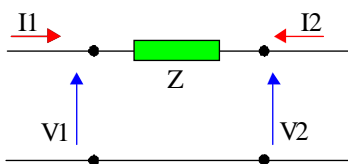


Fig. 3

Il contient une seule impédance. La loi des mailles donne :
 $V_2 = V_1 - Z \cdot I_1$ et $I_2 = -I_1$
 Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

On peut noter que pour ce quadripôle, le déterminant de la matrice liant les grandeurs d'entrée aux grandeurs de sortie est égal à 1.

□ – Quadripôle parallèle

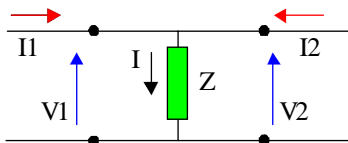


Fig. 4

$V_2 = V_1$; $I_1 + I_2 = I$; $I_2 = V_1/Z - I_1$
 Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

Ici encore, le déterminant de la matrice est égal à 1.

¹ Ne pas confondre avec les quadripôles de l'électrostatique.

□ – Transformateur idéal en régime sinusoïdal (cf § 8)

On néglige toutes les pertes (résistives et dues aux courants de Foucault).

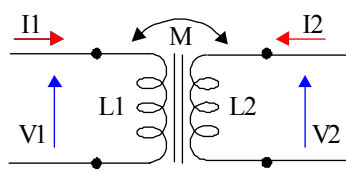


Fig. 5

$$V_1 = L_1 \cdot dI_1/dt + M \cdot dI_2/dt$$

$$V_2 = M \cdot dI_1/dt + L_2 \cdot dI_2/dt$$

$$V_1 = jL_1 \cdot \omega \cdot I_1 + jM \cdot \omega \cdot I_2$$

$$V_2 = jM \cdot \omega \cdot I_1 + jL_2 \cdot \omega \cdot I_2$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = j\omega \cdot \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

3 – Matrices représentatives des quadripôles

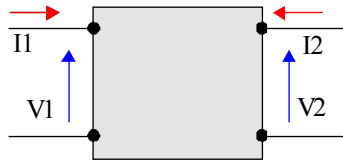


Fig. 6

Pour les quadripôles ne contenant que des dipôles *linéaires* les 4 grandeurs fondamentales V_1 , V_2 , I_1 et I_2 sont liées par des équations linéaires.

Plusieurs représentations matricielles sont possibles et le choix de l'une de celles-ci sera fait en fonction du problème étudié.

□ Matrice impédance

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

On exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances.

□ Matrice admittance

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On exprime les courants en fonction des tensions. Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances.

□ Matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. T_{11} est un nombre, T_{12} est une impédance, T_{21} une admittance et T_{22} un nombre.

Bien noter dans cette représentation le *signe moins* affecté à I_1 .

La matrice inverse de la matrice de transfert donne les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie.

□ Matrice hybride

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

L'intérêt de cette représentation apparaît lors de l'étude des transistors.

H_{11} est une impédance, H_{12} est un nombre, H_{21} un nombre et H_{22} une admittance.

On utilise parfois la matrice $[G] = [H]^{-1}$

Les relations étant linéaires, il est facile de déduire les coefficients d'une représentation à partir de ceux d'une autre.

□ Caractéristiques des quadripôles passifs

Ce sont les réseaux de courbes qui représentent les variations des tensions en fonction des courants. Par exemple, pour le réseau $V_1 = g(I_1)$, on prendra I_2 ou V_2 comme paramètre : chaque courbe de ce réseau est tracée pour une valeur donnée et constante de I_2 (ou de V_2).

□ Propriété des quadripôles passifs

Soit un quadripôle *passif* dont la tension d'entrée est E et le courant de court-circuit en sortie est I_S . D'après le théorème de réciprocité, le courant dans l'entrée en court-circuit est $I_E = I_S$ si la tension de sortie est E .



Fig. 7

Les relations *entrée* \Leftrightarrow *sortie* pour la matrice de transfert s'écrivent :

$$V_2 = T_{11}V_1 - T_{12}I_1$$

$$I_2 = T_{21}V_1 - T_{22}I_1$$

Sortie en court-circuit :

$$0 = T_{11}E - T_{12}I_1$$

$$I_S = T_{21}E - T_{22}I_1$$

Entrée en court-circuit :

$$E = 0 - T_{12}I_E$$

$$I_2 = 0 - T_{22}I_E$$

L'égalité $I_E = I_S$ implique que : $\Delta(\mathbf{T}) = T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21} = 1$.

Des calculs analogues montrent que pour un quadripôle passif on a aussi :

$$Z_{21} = Z_{12} \text{ et } H_{21} = -H_{12}$$

4 – Associations de quadripôles

□ Association en cascade

Les deux sorties du premier sont reliées aux deux entrées du second. On utilise les matrices de transfert $[T_1]$ et $[T_2]$ des deux quadripôles associés.

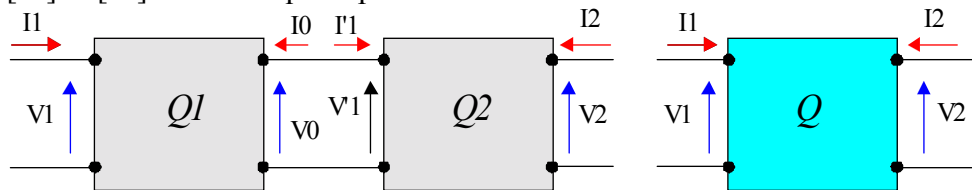


Fig. 8

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = [T_1] \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T_2] \cdot \begin{bmatrix} V'_1 \\ -I'_1 \end{bmatrix}$$

$$V'_1 = V_0 \quad I'_1 = -I_0$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T_2] \cdot [T_1] \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T_{Eq}] = [T_2] \cdot [T_1]$$

La matrice de transfert du quadripôle équivalent est donc égale au produit de la seconde matrice de transfert par la première. Attention car ce produit n'est pas commutatif !

APPLICATIONS :

◆ Quadripôle en T

On considère l'association de trois quadripôles en cascade et on recherche la **matrice de transfert** équivalente.

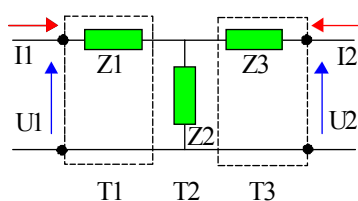


Fig. 9

$$[T_{Eq}] = [T_3] \cdot [T_2] \cdot [T_1] \text{ (Attention à l'ordre !)}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_{Eq}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_3}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

◆ Quadripôle en Π

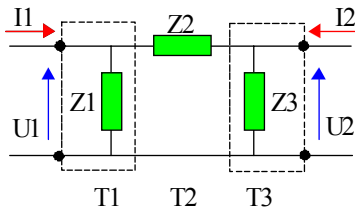


Fig. 10

$$[T_{Eq}] = [T_3] \cdot [T_2] \cdot [T_1]$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_{Eq}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \end{bmatrix}$$

□ Association en série

Dans ce cas, il y a additivité des tensions aux bornes des quadripôles ; les courants sont identiques. On en déduit simplement la **matrice impédance** équivalente.

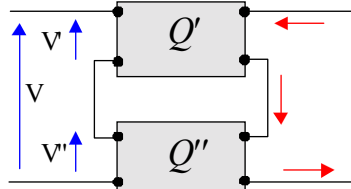


Fig. 11

$$[V'] = [Z'] \cdot [I']$$

$$[V''] = [Z''] \cdot [I'']$$

$$[V] = [V'] + [V'']$$

$$[I] = [I'] = [I'']$$

$$[Z] = [Z'] + [Z'']$$

□ Association en parallèle

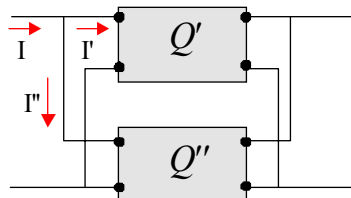


Fig. 12

Il y a additivité des courants et identité des tensions : la **matrice admittance** du quadripôle équivalent est la somme des matrices admittance des 2 quadripôles :

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

5 – Grandeurs fondamentales des quadripôles

Il est possible de définir pour un quadripôle des grandeurs caractéristiques comme les impédances d'entrée et de sortie, et les gains en tension, courant et puissance.

□ Impédance d'entrée

C'est l'impédance $Z_E = V_E / I_E$ vue à l'entrée quand la sortie est chargée par une impédance Z_U . On utilise la matrice impédance du quadripôle.

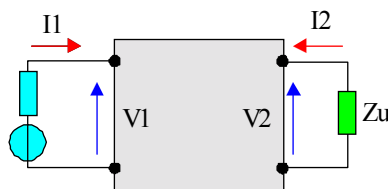


Fig. 13

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 = -Z_U \cdot I_2$$

$$I_2 (Z_U + Z_{22}) = -Z_{21} \cdot I_1$$

$$I_2 = -Z_{21} \cdot I_1 / (Z_{22} + Z_U)$$

$$V_1 = I_1 \cdot \{Z_{11} - Z_{12} \cdot Z_{21} / (Z_{22} + Z_U)\}$$

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22} + Z_U}$$

□ Impédance de sortie

C'est l'impédance $Z_S = V_S / I_S$ vue à la sortie quand l'entrée est fermée par une impédance Z_G qui est l'impédance du générateur.

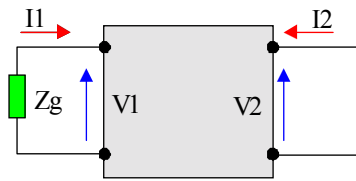


Fig. 14

Un calcul analogue au précédent donne :

$$Z_S = Z_{22} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{11} + Z_G}$$

□ Gain en tension

C'est le quotient de la tension de sortie par la tension d'entrée : $A_V = V_2 / V_1$

$$V_2 = T_{11} \cdot V_1 - T_{12} \cdot I_1$$

$$I_2 = T_{21} \cdot V_1 - T_{22} \cdot I_1$$

$$\text{Or : } V_2 = -Z_U \cdot I_2$$

$$T_{22} \cdot I_1 = T_{21} \cdot V_1 - I_2 = T_{21} \cdot V_1 + V_2 / Z_U$$

$$V_2 = T_{11} \cdot V_1 - (T_{12} \cdot T_{21} / T_{22}) \cdot V_1 - T_{12} \cdot V_2 / T_{22} \cdot Z_U$$

Cas particulier : les quadripôles passifs

On a alors : $\Delta(T) = 1$

$$V_2 \left(1 + \frac{T_{12}}{T_{22} \cdot Z_U} \right) = V_1 \left(\frac{T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21}}{T_{22}} \right) = \frac{V_1}{T_{22}}$$

$$A_V = \frac{Z_U}{Z_U \cdot T_{22} + T_{12}}$$

Si $Z_U = \infty$ (quadripôle non chargé) alors : $A_V = 1 / T_{22}$.

6 – Schémas équivalents des quadripôles linéaires

On remplace le quadripôle étudié par un circuit équivalent (dont les équations sont les mêmes que celles du circuit étudié), mais dans lequel *entrée et sortie sont séparées*. Plusieurs schémas de quadripôles équivalents sont utilisés :

□ Paramètres « impédances »

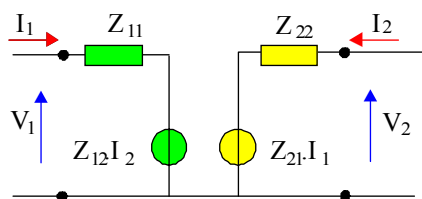


Fig. 15

Le circuit équivalent comporte des impédances et des générateurs de tension.

$$V_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2$$

$$V_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2$$

□ Paramètres « admittances »

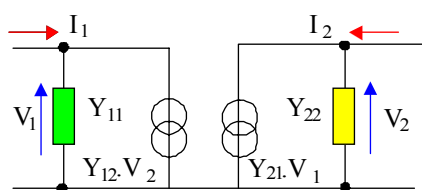


Fig. 16

Le circuit équivalent comporte des admittances et des générateurs de courant.

$$I_1 = Y_{11} \cdot V_1 + Y_{12} \cdot V_2$$

$$I_2 = Y_{21} \cdot V_1 + Y_{22} \cdot V_2$$

□ Paramètres « hybrides »

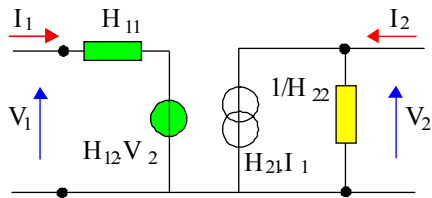


Fig. 17

Pour le modèle hybride, on obtient :

$$V_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot V_2$$

$$I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot V_2$$

Attention aux dimensions des paramètres :

H_{11} = Impédance, H_{12} = Nombre...

□ Modèle amplificateur d'un quadripôle linéaire

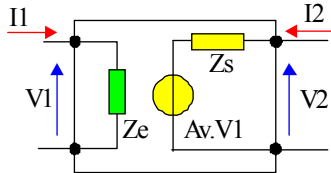


Fig. 18

Dans ce modèle, le circuit d'entrée est réduit à l'impédance d'entrée Z_E . Celui de sortie comporte un générateur de tension de f.e.m. $A_V \cdot V_E$ en série avec l'impédance de sortie Z_S .

$$V_1 = Z_E \cdot I_1$$

$$V_2 = A_V \cdot V_1 + Z_S \cdot I_2$$

7 – Schémas équivalents des quadripôles *non* linéaires

Les composants utilisés en électronique sont très souvent non linéaires et une étude analytique rigoureuse du circuit est alors impossible. Pour étudier le comportement du circuit, on peut utiliser des méthodes graphiques.

Supposons connues les caractéristiques d'un quadripôle non linéaire : ce sont les réseaux de courbes $V_1 = f(I_1, I_2)$ et $V_2 = g(I_1, I_2)$. Par exemple dans le plan V_1, I_1 on trace le réseau des courbes $V_1 = f(I_1)$ en prenant la valeur du courant I_2 comme paramètre. De même dans le plan V_1, I_2 , on trace le réseau des courbes $V_1 = g(I_2)$ en prenant la valeur de I_1 comme paramètre. On impose à l'entrée les valeurs de V_1 et de I_1 ; les valeurs de sortie sont V_2 et I_2 . Ces 4 valeurs définissent le *point de repos* ou *point de fonctionnement*. Comment évolue ce point si I_1 varie de dI_1 ?

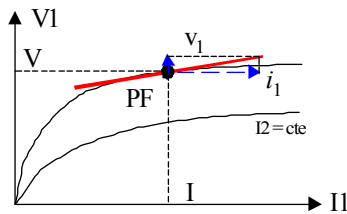


Fig. 19

Au voisinage du point de repos, on peut écrire les variations des valeurs « statiques » :

$$dV_1 = \left(\frac{\partial V_1}{\partial I_1} \right)_{I_2=C} \cdot dI_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial I_2} \right)_{I_1=C} \cdot dI_2$$

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial I_1} \right)_{I_2=C} \cdot dI_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial I_2} \right)_{I_1=C} \cdot dI_2$$

Les dérivées partielles $\left(\frac{\partial V_i}{\partial I_i} \right)_{PF}$ sont les pentes des tangentes aux caractéristiques au voisinage du point de repos et ont la dimension d'une impédance :

$$\begin{cases} dV_1 = z_{11} \cdot dI_1 + z_{12} \cdot dI_2 \\ dV_2 = z_{21} \cdot dI_1 + z_{22} \cdot dI_2 \end{cases}$$

Les paramètres z_{ij} sont les dérivées des paramètres « statiques » Z_{ij} au voisinage du point de repos : ce sont des paramètres « dynamiques ». Cette notation des différentielles est rigoureuse mais lourde à utiliser.



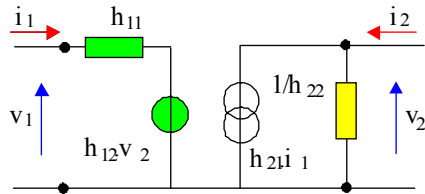
En électronique, on note la différentielle dA de la grandeur A avec la lettre minuscule a .

La minuscule a correspond à la variation de la grandeur statique représentée par A .

Ainsi, en posant $v_1 = dV_1$; $i_1 = dI_1 \dots$, on obtient pour la matrice impédance :

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} \cdot i_1 + z_{12} \cdot i_2 \\ v_2 = z_{21} \cdot i_1 + z_{22} \cdot i_2 \end{cases}$$

Dans une région où les caractéristiques sont linéaires, ce modèle permet une représentation correcte des propriétés du quadripôle. Il est également possible de modéliser le quadripôle par un circuit linéaire équivalent dont les valeurs sont celles du quadripôle au voisinage du point de fonctionnement. Ainsi pour le modèle hybride, on obtient (comparer avec la figure 17) :



$$v_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot v_2$$

$$i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot v_2$$

Ne pas confondre les H_{ij} et les h_{ij} .

Fig. 20

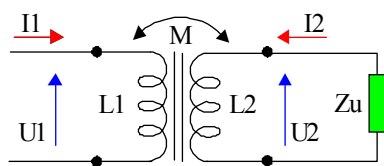
8 – Exemple de quadripôle : le transformateur idéal

On admet que les inductances sont des solénoïdes de section S ayant N_1 et N_2 spires, des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 et que les pertes sont négligeables. Si Φ_1 est le flux d'induction à travers l'enroulement primaire, on a :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 = N_1 B_1 S + N_1 B_2 S; \quad B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{\ell}; \quad B_2 = \frac{\mu N_2 I_2}{\ell}$$

$$L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{\ell}; \quad M = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad L_1 = k \cdot N_1^2 \quad M = k \cdot N_1 N_2 = \sqrt{L_1 L_2}$$

Avec ces hypothèses, on obtient en régime sinusoïdal :



$$V_1 = jL_1 \cdot \omega \cdot I_1 + jM \cdot \omega \cdot I_2$$

$$V_2 = jM \cdot \omega \cdot I_1 + jL_2 \cdot \omega \cdot I_2$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = j\omega \cdot \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

A partir de l'expression de la matrice Z du transformateur, on détermine l'expression de l'impédance vue à l'entrée quand le transformateur est chargé par une impédance Z_u .

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_u} = jL_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{jL_2 \omega + Z_u}. \text{ Soit : } Z_E = \frac{jL_1 \omega Z_u}{Z_u + jL_2 \omega}$$

Cette impédance est équivalente à une impédance $Z_u \cdot L_1 / L_2$ en parallèle avec une impédance $jL_1 \omega$. Si le produit $L_1 \omega$ est assez grand, l'impédance présentée par le transformateur chargé est donc $Z_u \cdot L_1 / L_2 = Z_u \cdot (N_1 / N_2)^2 = Z_u \cdot n^2$. ($n = N_1 / N_2$ est le rapport de transformation).

Le transformateur permet donc l'adaptation en puissance des impédances entre une source d'impédance Z_s et une charge d'impédance Z_u . Il suffit d'utiliser un transformateur de rapport $n^2 = Z_s / Z_u$.

REMARQUE : Comme on néglige les pertes, ce quadripôle *passif* possède un gain en puissance égal à 1. Le gain en tension peut être supérieur ou inférieur à 1 (transformateur élévateur ou abaisseur de tension).