I. Les séries numériques

Exercice N°1:

I. Démontrer que la série $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+.................=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge et chercher sa somme.

II. La même question pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Solution :

I. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique avec $U_1=\frac{2}{3}$; et la raison $q=\frac{2}{3}<1 \Longrightarrow$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente.

$$\left(S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=2\right)$$

Donc la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=2$

II. Soit $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)$

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

Donc la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$

Exercice N°2:

Quelle est la nature des séries suivantes :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n+2})$; $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$

Solution :

- On remarque que le terme général

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ *la série* $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n+2}\right)$ *est divergente.*

- On a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ *la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ *est divergente.*

Exercice N°3:

Appliquer le critère de comparaison pour étudier la convergence ou la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$

Solution :

$$\forall n \geq 1: \quad \ln n \leq \sqrt{n}$$

$$\forall n \geq 1: \quad \frac{\ln n}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+1s}$$

Et on a la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$est convergente, car en appliquant la règle de Riemann on

$\lim_{n\to+\infty} n^p \times u_n = k \Longrightarrow on\ prend\ p = \frac{3}{2} > 1\ on\ \ trouve\ k = 0 \neq \infty$

Donc par comparaison la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2+1}$ est convergente également

Exercice N° 4 : Etudier la convergence ou la divergence des séries suivantes:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+3}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3(\frac{1}{n})$; $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$

Solution :

1) en appliquant la règle de Riemann on $\left(\forall n \geq 1: u_n = \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n} \geq 0\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} n^p \times u_n = \lim_{n\to+\infty} n^p \times \left(\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}\right) = k \Longrightarrow on\ prend\ p = 1\ on\ \ trouve\ k = 4 \neq 0$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ est divergente.

2) en appliquant la règle de Riemann on $\left(\forall n \geq 1: u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1} \geq 0\right)$

$\lim_{n\to+\infty} n^p \times u_n = \lim_{n\to+\infty} n^p \times \left(\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}\right) = k \Longrightarrow on\ prend\ p = 2 > 1\ on\ \ trouve\ k = \frac{1}{2} \neq \infty$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ est convergente.

3) en appliquant la règle de Riemann on $\left(\forall n \geq 1: u_n = \sin^3 \frac{1}{n} \geq 0\right)$

$\lim_{n\to+\infty} n^p \times u_n = \lim_{n\to+\infty} n^p \times \left(\sin^3 \frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^p} \times (\sin^3 t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 = 1 \Longrightarrow on\ prend\ p = 3 >$
$1\ on\ \ trouve\ k = 4 \neq 0$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \sin^3 \frac{1}{n}$ est convergente.

4) $\forall n \geq 2: u_n = \frac{1}{n \ln n} \geq 0$on a aussi $\mathrm{u_n}$ est décroissante $\left(\forall n \geq 2: u'_n = \frac{du_n}{dn} \leq 0\right)$

On peut utiliser le critère d'intégrale où la série a la même nature que l'intégrale impropre :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} dn = [\ln \ln n]_2^{+\infty} = +\infty$$

Alors l'intégrale diverge alors la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$est divergente également.

<u>Exercice N°5</u> : Etudier la convergence absolue des séries suivantes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2 n}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$ (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+1)e^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2n+1}{3n+4})^n$ (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Solution :

c) en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}/_{(n+1)^2}}{2^n/_{(n)^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n^2}{(n^2+2n+1)}\right| = 2 > 1$$

Alors la série est divergente.

d) en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|e^{-2n-1}\right| = 0 < 1$$

Alors la série est convergente.

e) en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)/(n+2)\,e^{(n+1)}}{n/(n+1)\,e^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{e^n}{e^{n+1}}\right| = \frac{1}{e} < 1$$

Alors la série est convergente.

f) en appliquant la règle de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n+1}{3n+4}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

Alors la série est convergente.

g) en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}\times n!}{n^n\times(n+1)\times n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e > 1$$

Alors la série est divergente.