Université M^{ed} Boudiaf M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Rappel#2

DERIVATION ET INTEGRATION NUMERIQUES

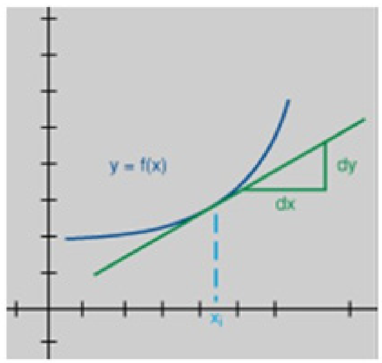
Contenu du TP :

1. Généralités
2. Dérivation Numerique
   - Les différents Schémas aux différences
3. Intégration Numérique
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson

Elaboration d'un programme Fortran

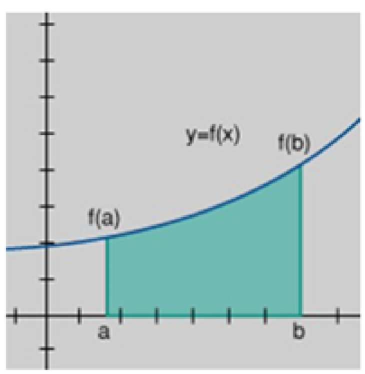
1. Généralités

- Déterminer la vitesse à laquelle une courbe change a un certain point.



Ceci revient à calculer la dérivée y'

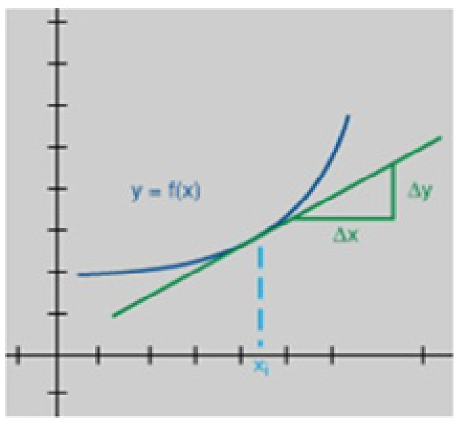
- L'intégration correspond au calcul de l'aire qui est la surface sous la courbe.



Ceci revient à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)$

1. Dérivation Numérique :

La dérivation numérique nous permet de trouver une estimation de la dérivée ou de la pente d'une fonction, en utilisant seulement un ensemble discret de points.
Différencier ou dériver signifie, trouver la ponte de la tangente a la courbe en un point précis.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

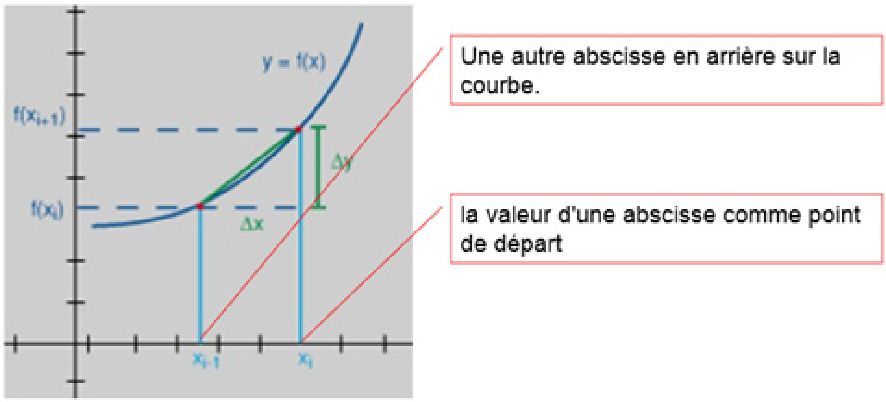
1.1 Les différentes méthodes de la dérivation numérique :

Les formules de différence les plus simples basées sur l'utilisation de la ligne droite pour interpoler les données, utilisent deux points pour estimer la dérivée.

Les trois schémas classiques de différences sont :

a. Différence en arrière (Régressive) ou décentrée à gauche:

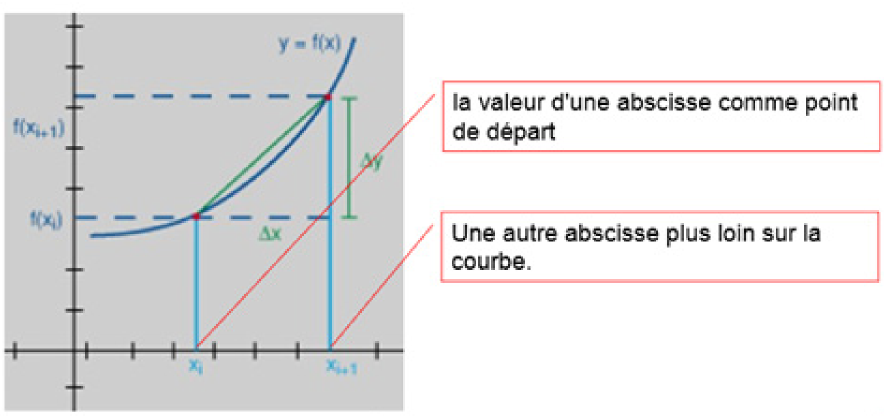
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

b. Différence en avant (progressive) ou décentrée à droite :

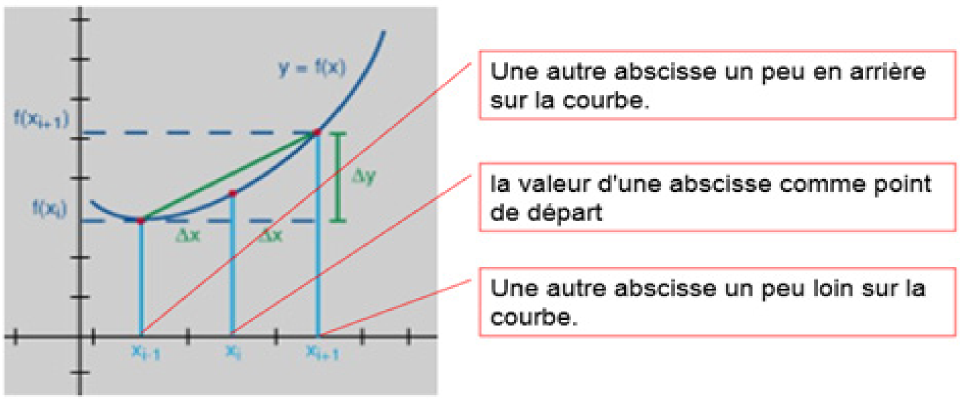
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

c. <u>Différence centrale ou centrée :</u>

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

<u>Exemple :</u>

Pour illustrer les trois formules, considérons les données suivantes:
$(x_0; y_0) = (1; 2)$; $(x_1; y_1) = (2; 4)$; $(x_2; y_2) = (3; 8)$; $(x_3; y_3) = (4; 16)$ et $(x_4; y_4) = (5; 32)$:

Nous voulons estimer la valeur de $f'(x_2)$.

Progressive: $f'(x) \approx \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{16-8}{4-3} = 8.$

Regressive : $f'(x) \approx \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{8-4}{3-2} = 4.$

Centrale : $f'(x) \approx \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{16-4}{4-2} = 6.$

Les données ont été calculé pour la fonction $f(x) = 2^x$, $f^{'}(x) = 2^x\, ln(2)$ et pour $x = 3$, $f^{'}(3) = 2^3\, ln(2) = 5,544$.

d. Formule générale en trois points.

La formule d'approximation en 3 points de la dérivée première, basée sur le polynôme d'interpolation de Lagrange, n'utilise pas des points équidistants.
Etant donné trois points $(x1; y1)$; $(x2; y2)$ et $(x3; y3)$ avec $x1 < x2 < x3$.
Le polynôme de Lagrange est donnée par :

$$P(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

où

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

L'approximation de la dérivée première est donnée par : $f'(x) \approx P'(x)$.

$$P'(x) = L_1'(x)y_1 + L_2'(x)y_2 + L_3'(x)y_3$$

où

$$L_1'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

donc

$$f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3.$$

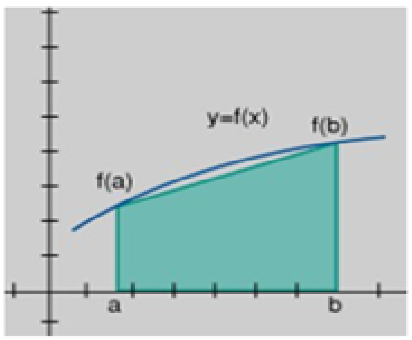
2. Intégration Numerique :

Les deux méthodes les plus utilisées sont la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.

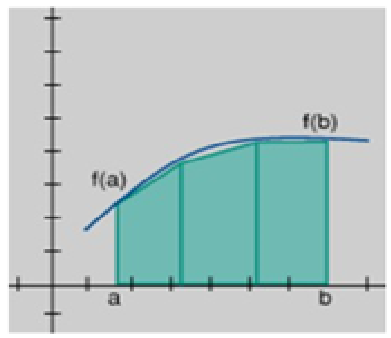
a. La méthode des trapèzes

2 points, polynôme d'interpolation $\longrightarrow$ une droite

Utilisez un trapèze au lieu d'un rectangle.

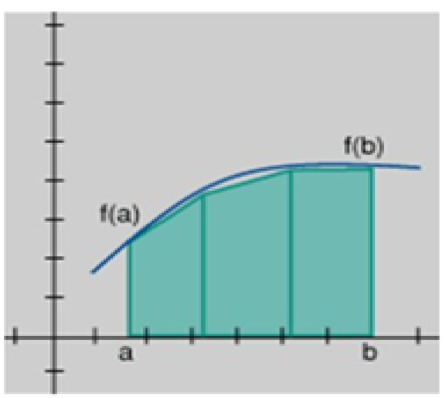


Raffiner pour minimiser l'erreur



Formule de la surface d'un trapèze :
Multiplier la hauteur par la moyenne des bases

I = (b-a)[(f(a)+f(b)]/2



- Calculer la largeur de chaque sous intervalle

h = (b-a)/n

- Déterminer l'aire pour chaque sous-intervalle

ai = h/2[f(xi-1) + f(xi)]

- Additionner toutes ces sous-intervalles et déterminer l'aire totale.

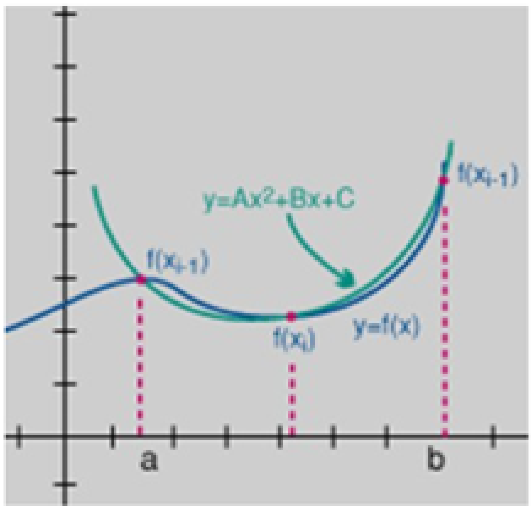
$$I = \sum_{i=1}^{n} A_i = h/2\ \{[f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$

- Sous une forme plus courte :

$$I = h/2\ [f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

b. La méthode de Simpson

3 points $\longrightarrow$ polynôme d'interpolation de degré 2



- Evaluer les coefficients de la parabole :

A = (xi-1, yi-1)
B = (xi, yi)
C = (xi+1, yi+1)

- L'aire sous une parabole dans une sous-intervalle :

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = h/3\,[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Avec : **h = (b-a)/n.**

- Utiliser la règle de Simpson pour déterminer une intervalle entière :

$$I = \int_a^b f(x).dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x).dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x).dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x).dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{impair}) + 2\sum_{i=2}^{n-2} f(x_{pair}) \right)$$

h=(b-a)/n

Remarque :

Chaque méthode de calcul numérique est caractérisée par son degré de précision qui dépond des erreurs dus essentiellement aux termes négligés (erreur de troncature).

Exemple :

x	$f(x) = x^3$
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216

1- Calculer $\int_0^6 f(x)dx$ les deux méthodes.
2- Calculer l'intégrale ci-dessus analytiquement et commenter ?
3- Elaborer un programme en FORTRAN qui permet de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction quelconque F(x), par la méthode des trapèzes et par la méthode de Simpson.