Université M^{ed} Boudiaf M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Rappel#3

RESOLUTION DE SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES ET NON LINEAIRES

Contenu :

I- Résolution de système d'équations linéaires

.I-1 La méthode de Gauss

I-2 La méthode de Gauss-Seidel

I- Résolution de système d'équations linéaires

<u>Définitions :</u>

Un système de m équations à n inconnues x1, x2, ...xn s'écrit sous forme matricielle : AX = B où A est une matrice comportant n lignes et n colonnes, X est le vecteur colonne dont les composantes sont les xi et B , le second membre, est aussi un vecteur colonne avec n composantes. Le vecteur X est appelé solution du système.

<u>L'existence de la solution :</u>

Soit à résoudre le système linéaire
$Ax = b$.
$A \in Mn(IR)$: matrice carrée de dimension $n \times n$
$x, b \in IRn$: vecteurs de dimension n.
Le système $Ax = b$ à une solution unique si et seulement si son déterminant est non nul.

Il y a deux types de méthodes, Directe et itérative. Une méthode directe est une méthode qui permet de résoudre le système en un nombre fini d'opérations et en arithmétique exacte. Dans ce TP on va voir **<u>la méthode de Gauss</u>**, les autres méthodes directes sont par exemple :

– La méthode de la décomposition *LU*,
– La méthode de Cholesky,
– La méthode de la factorisation *QR*

.I-1 La méthode de Gauss

L'idée de cette méthode est de se ramener à un système linéaire dont la matrice est triangulaire supérieure, on obtient ensuite la solution par simple remontée.

Examinons les deux systèmes linéaires ci-dessous :

$$\textbf{(A)}: \left[\begin{array}{l} 3x + 5y + 7z = 101 \\ 2x + 10y + 6z = 134 \\ 1x + 2y + 3z = 40 \end{array}\right. \qquad \textbf{(B)}: \left[\begin{array}{rrrl} 2x + & 5y + & 3z = & 49 \quad \textbf{(L1)} \\ & 4y + & 2z = & 30 \quad \textbf{(L2)} \\ & & 7z = & 21 \quad \textbf{(L3)} \end{array}\right.$$

Le système (A) n'est pas très simple à résoudre car les 3 inconnues sont présentes dans les 3 équations.

Le système **(B)** est très simple à résoudre :
(L3) donne : $z = 3$.
Puis dans **(L2)** : $4y + 6 = 30$ donc $y = (30-6)/4 = 6$.
Enfin dans **(L1)** : $2x + 30 + 9 = 49$ donc $x = (49 - 30 - 9)/2 = 5$.

Conclusion : On a trouvé la solution du système **(B)** :

$$x = 5$$
$$y = 6$$
$$z = 3$$

Le système linéaire **(B)** est **triangulaire supérieur**.

Problème : les systèmes linéaires se présentent plus souvent sous la forme du système **(A)** que sous la forme triangulaire supérieure comme le système **(B)**.

Solution : pour résoudre le système **(A)**, on le transforme en un système triangulaire supérieur équivalent.

La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre. On ne change pas la solution d'un système linéaire lorsque :

- on permute deux lignes,
- on permute deux colonnes,
- on multiplie une ligne par un **réel** non nul,
- on ajoute une ligne à une autre.

Nous allons donc utiliser ces transformations pour se ramener le système **(A)** à un cas simple système **(B)**.

Matrice Triangulaire

Une matrice d'un système soit triangulaire si tous les termes situés d'un côté de la diagonale principale soient nuls. Selon le côté, on parlera de matrice *triangulaire inférieure (L)* ou de matrice *triangulaire supérieure (U)*:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$$

L'EXPOSE DE LA METHODE : La méthode de Gauss se décompose en deux étapes :

1ère Etape : L'élimination de Gauss : on forme le système triangulaire supérieur équivalent en éliminant tous les termes situés sous la diagonale du système.

2ème Etape : La remontée : on résout le système triangulaire supérieur comme on vient de le Prenons l'exemple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y + 2z & = & 2 & L_1 \\ x + 3y - 2z & = & -1 & L_2 \\ 3x + 5y + 8z & = & 8 & L_3 \end{array} \right.$$

On conserve la ligne L_1, qui sert de pivot pour éliminer l'inconnue x des autres lignes; pour cela, on retire L_1 à L_2, et 3 fois L_1 à L_3. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y + 2z & = & 2 & L_1 \\ y - 4z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + 2z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

On conserve alors la ligne L_2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne; pour cela, on remplace la ligne L_3 par L_3-L_2. On trouve:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x + 2y + 2z & = & 2 & L_1 \\ y - 4z & = & -3 & L_2 \\ -2z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

Ce dernier système est facile à résoudre : la dernière ligne donne z, en reportant, la deuxième ligne donne y, etc...

- **Algorithme de Gauss :**

Triangularisation:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) * a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_{i}^{(k)} = b_{i}^{(k-1)} - \left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right) * b_{k}^{(k-1)}$$

Résolution:

$$X_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$X_i = \frac{\left(b_i - \sum a_{ij} X_j\right)}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

I-2 La méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution de système linéaire de la forme ***A x* = *B*** où :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}$$

Pour cela, on va construire une suite de vecteurs : $\boldsymbol{x}^{(0)},\ \boldsymbol{x}^{(1)},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}^{(k)},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)},\ \ldots$

qui converge vers ***x*** , solution du système d'équations linéaires.

Remarque : chacun des vecteurs successifs est identifié par un numéro placé en exposant et entre parenthèses.

On transforme le système précédant comme suit, avec la condition que tous les $a_{ii} \neq 0$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots\dots\dots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots\dots\dots - a_{2n}x_n^{(k)}/a_{22} \\ . \\ . \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots\dots\dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}$$

k étant l'indice d'itération.

Algorithme de Gauss-Seidel :

1. A, b, $X^{(0)}$ (approximation initiale), ε_1, ε_2 et k_{max} sont donnés.

2.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]}{a_{ii}}$$

avec $i = 1, n$

3. Arrêter si :

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \langle \varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|}{\left| x_i^{(k+1)} \right|} \right) \langle \varepsilon_2$$

avec $k=1,\dots\dots,k_{max}$

Exercice d'application :

1- Appliquer la méthode de Gauss manuellement pour résoudre le système suivant :
   a. 1ere étape est de trouver le système triangulaire équivalent.
   b. 2eme étape est de trouver la solution du système.

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{2}x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 14 \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & 16 \end{array}$$

2- Transformer l'algorithme de Gauss en un programme Fortran qui permet de résoudre un système linéaire de matrice n x n en utilisant deux subroutines l'une pour la triangularisation et l'autre pour la résolution.