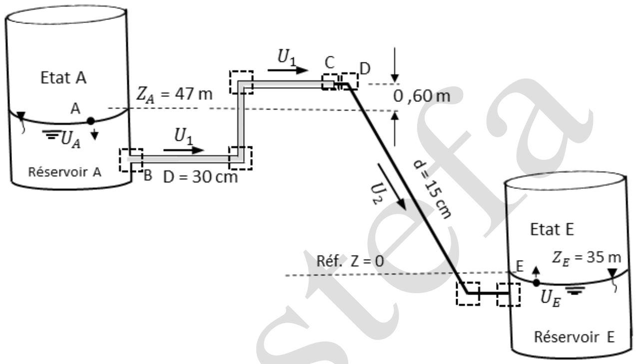
Exercice 1

Un écoulement de l'huile (densité d = 0,761) circule dans une conduite entre deux grands réservoirs de (A) vers (E), voir la figure. On suppose que les termes de perte de charge linéaires sont les suivantes :

$\Delta H_{AB} = 0{,}6\frac{U_1^2}{2g}$, $\Delta H_{BC} = 9{,}0\frac{U_1^2}{2g}$, $\Delta H_{CD} = 0{,}4\frac{U_2^2}{2g}$, $\Delta H_{DE} = 9{,}0\frac{U_2^2}{2g}$

Trouver le débit de circulation dans la conduite, prendre l'état (E) comme niveau de référence des Z. (les pertes de charge singulières sont négligeables).



Solution

Suivant l'équation de Bernoulli pour un écoulement permanent et un fluide incompressible et réel, le liquide s'écoule de (A) vers (E).

$$H_A = H_E + \Delta H_{AE}$$

Avec : $\Delta H_{AE} = \sum \Delta H_l$ et $\sum \Delta H_{sing} = 0$

$$\Delta H_{AE} = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{DE}$$

En état A : $P_A = 0$ (utilisant la pression relative), $U_A \approx 0$ (vitesse de descente de la surface libre dans le réservoir (A) est faible), $z_A = 12\ m$ (Référence $z_E = 0$),

En état B : $P_E = 0$ (utilisant la pression relative), $U_E \approx 0$ (vitesse de remonte de la surface libre dans le réservoir (E) est faible), $z_E = 0\ m$

Donc : $(0{,}0 + 0 + 12{,}0) = (0{,}0 + 0 + 0) + \left[\left(0{,}6\frac{U_1^2}{2g} + 9{,}0\frac{U_1^2}{2g}\right) + \left(0{,}4\frac{U_2^2}{2g} + 9{,}0\frac{U_2^2}{2g}\right)\right]$

$$12{,}0 = 9{,}6\left(\frac{U_1^2}{2g}\right) + 9{,}4\left(\frac{U_2^2}{2g}\right)$$

Suivant le principe de conservation de masse :

$$U_1\, S_1 = U_2\, S_2 \Rightarrow U_1 \frac{\pi(0{,}30)^2}{4} = U_2 \frac{\pi(0{,}15)^2}{4} \Rightarrow U_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 U_2^2$$

On trouve :

$$\frac{U_2^2}{2g} = 1{,}2\ m \ \ ,\ \ U_2 = 4{,}85\ m/s \quad et \quad Q = \frac{3{,}14 \times (0{,}15)^2}{4} \times 4{,}85 = 0{,}086\ m^3/s$$

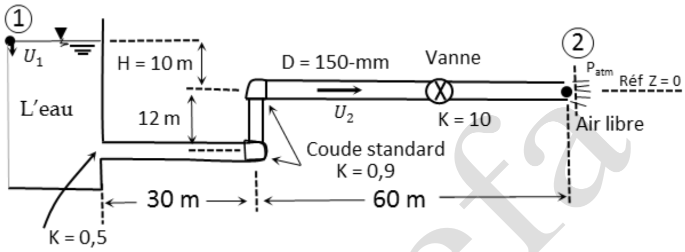
Exercice 2

Un réservoir d'eau alimente une conduite en fonte comme indique la figure ci-dessous. Déterminer : 1) Le débit de circulation dans la conduite

2) Les pertes de charge totale et la charge hydraulique en état (1) pour un débit de demande Q = 60 l/s.

Sachant que : D = 150 mm ε/D = 0,0017 et ν = 1,01 10-6 m2/s.

Solution



1) L'équation de Bernoulli appliquée entre les états (1) et (2) incluant toutes les pertes de charge :

$$H_1 = H_2 + \sum \Delta H_{12}$$

$$0{,}0 + 0 + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + 0 + 0 + \lambda \frac{\sum L}{D}\frac{U_2^2}{2g} + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\frac{U_2^2}{2g}$$

où K_1 = 0,5 est le coefficient de perte de charge à l'entrée, $K_2 = K_3$ = 0,9 est le coefficient de perte du coude standard et K_4 = 10 est le coefficient de perte de la vanne.

$$Z_1 = 10 = \frac{U_2^2}{2g}(13{,}3 + 680\,\lambda) \Rightarrow U_2 = \sqrt{\frac{10 \times 2g}{(13{,}3 + 680 \times \lambda)}} \qquad (1)$$

Pour résoudre ce type de problème (une équation devant deux inconnues), utilisant la méthode itérative. On propose une valeur initiale de λ_0 = 0,020 pour calculer la vitesse U_2 à condition que l'équation (1) doit être vérifiée.

Itération n° : 1 on suppose λ_0 = 0,020

La vitesse est : $U_2 = \sqrt{\frac{10 \times 2 \times 9{,}81}{(13{,}3 + 680 \times 0{,}020)}} = 2{,}70\ \mathrm{m/s}$

On calcul Re = 4,00 10^5 et avec $\varepsilon/D = 0{,}0017$ on peut estimer λ à partir du diagramme de Moody.

Le tableau suivant résumé les étapes de la méthode d'itération

j	λ_{j-1}	U_2 (m/s)	R_e	λ_j	
1	0,020	2,70	4,00 10^5	0,0228	Réessayer
2	0,0228	2,60	3,91 10^5	0,0229	Réessayer
3	0,0229	2,60	3,91 10^5	0,0229	Convergé (arrêt)

On accepte $U_2 = 2{,}60\ m/s$, $Q = U_2\ (\pi D^2/4) = 45{,}9\ 10^{-3}\frac{m^3}{s} \approx 46\ l/s$

2) le débit (Q) demandé est connu, la solution est directe :

$U_2 = \frac{Q}{S} = 0{,}06 \,/\, (\pi(0{,}15)^2/4) = 3,40\; m/s \quad R_e = 5{,}10\; 10^5 \qquad\qquad \lambda = 0{,}0229$

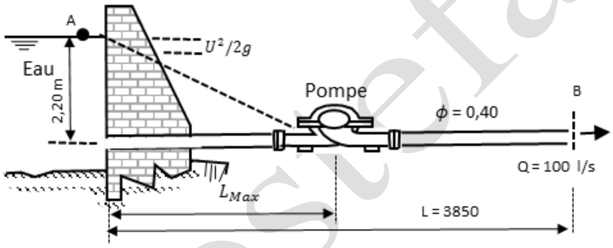
$$H_1 = \frac{U_2^2}{2g}(13{,}3 + 680\,\lambda) = \frac{(3{,}4)^2}{2 \times 9{,}81}(13{,}3 + 680 \times 0{,}0229) = 17{,}01\; m_{ce}$$

La charge en état (1) : $H_1 = 17{,}01\; m_{ce}$

Exercice II.11

Un petit barrage hydraulique de profondeur de 2,20 m d'eau à 20 °C est menu par une conduite de prise d'eau en béton (D = 0,40 m, $\lambda = 0{,}019$, $K_{entrée} = 0{,}5$). Le débit d'alimentation est estimé de 100 l/s, voir la figure.

1) Vérifier si la pompe est nécessaire.
2) Déterminer la distance maximale L_{max} pour localiser la pompe (prendre la pression égale à la pression atmosphérique).
3) Déterminer la puissance utile de la pompe.



Solution

1) Vérifier si la pompe est nécessaire :

Calcul les pertes de charge dans toute la longueur de la conduite 3850 m et de les comparer à la charge initiale (H = 0 + 0,0 + 2,2 = 2,2 m_{ce})

$$\Delta H_l = \lambda \frac{L}{D^5}\frac{8Q^2}{g\pi^2} = 0{,}019 \frac{8 \times 3850 \times (0{,}1)^2}{(0{,}4)^5 \times 9{,}81 \times (3{,}14)^2} = 5{,}91\; m_{ce}$$

$$\Delta H_{sing} = K_{ent}\frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4} = \frac{0{,}5 \times 8 \times (0{,}1)^2}{9{,}81 \times (3{,}14)^2 \times (0{,}4)^4} = 0{,}016\; m_{ce}$$

On remarque que les pertes ΔH_{sing} sont négligeables devant les pertes ΔH_l

Cela indique que les pertes de charge totales dans l'ensemble de la conduite sont supérieures de la charge initiale. $H = 2{,}20\; m \leq \sum \Delta H = 5{,}925\; m_{ce}$

Donc, la pompe est nécessaire pour véhiculer le débit de 100 l/s

2) Détermination de la distance L_{max} pour localiser la pompe

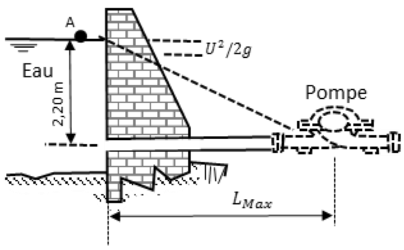
$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$$2{,}20 + 0 + 0{,}0 = 0 + 0 + \frac{U_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \qquad \left(\frac{P_B}{\rho g}\right)_{relative} = 0$$

$$2{,}20 = \frac{8\,(0{,}100)^2}{g\pi^2(0{,}4)^4} + 0{,}019\frac{L_{max}\,8\,(0{,}100)^2}{g\pi^2(0{,}4)^5} + (0{,}5)\frac{8(0{,}100)^2}{g\pi^2(0{,}4)^4}$$

$$2{,}20 = 0{,}045 + 0{,}0016\,L_{max} + 0{,}016$$

$$L_{max} = 1346{,}88\,m$$



Pour placer la pompe, on peut choisir une distance inférieure pour garder la charge d'aspiration positive : X = 1300 m.

3) La puissance absorbée de la pompe installée

Appliquer l'équation de Bernoulli entre les états (A) et (B)

$2{,}20 + H_{mt} = 0{,}045 + 5{,}925 + 0{,}016 \qquad \Rightarrow H_{mt} = 3{,}78\,m_{ce}$

$$\mathcal{P}_{ab} = \frac{1000 \times 9{,}81 \times 3{,}78 \times 0{,}100}{0{,}63} = 5{,}89\,KW$$