الفصل السادس: الإحصاء الكوانتي

الجمل ذات الجسيمات المتماثلة الغير متمايزة (البوزونات و االفيرميونات):

إن الجسيمات غير متمايزة هي تلك الجسيمات التي لايمكن التميز بينها اعتمادا على إحدى خواصها الذاتية، في الميكانيك الكلاسيكي كان تمييز الجسيمات المتماثلة ممكنة عند لحظة ما، ثم متابعة مسار كل جسيم وهو ما يعني أن مقاربة هذه الطريقة تعتمد على المسار مما يؤدي إلى عدم صلاحيتها في المجال الكونتي و لذالك فإنه على المستوى الذري تصبح الجسيمات غير متمايزة مما يعني أن إستبدال موضعي جسمين لجملة ما، لا يغير من حالة الجملة.

بينت التجربة وجود صنفين من الجسيمات غير المتمايزة:

1- جمل الجسيمات ذات دوال الحالة المتناظرة أي :

$$\psi\left(x_1, \dots, x_i, ..x_j, ..x_N\right) = \psi\left(x_1, \dots, x_j, ..x_i, ..x_N\right)$$

و تدعى بالبوزونات و تتميز بكونها ذات **سبين صحيح**

2- جمل الجسيمات ذات دوال الحالة ضد متناظرة اي :

$$\psi\left(x_1, \dots, x_i, ..x_j, ..x_N\right) = -\psi\left(x_1, \dots, x_j, ..x_i, ..x_N\right)$$

و تدعى الفرميونات و هي تتميز **بسبين نصف صحيح**.

إذا كانت جسيمات جملة ما غير متفاعلات فيما بينها أو تفاعل ضعيف يمكن إهماله، فإن حالة الجملة المشكلة من N جسيم يمكن إيجادها فيما وضعنا كل جسيم في حالة خاصة به، فإذا كانت :

$$\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t), \dots, \varphi_N(x,t)$$

هي الحالات الممكنة لجسيم ما فإنه يمكننا تشكيل دالة حالة متناظرة للجملة مشكلة من N جسيم **بالنسبة للبوزونات**

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\left[\sum_p \varphi_{\alpha 1}(x_1,t)\varphi_{\alpha 2}(x_2,t)\dots\varphi_{\alpha N}(x_N,t)\right]$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ تشكيلة من الاختيارات الممكنة و المجموع $\sum_p$ يتم على كل التبديلات الممكنة للمتغيرات

أما **بالنسبة للفيرمونات** فننشئ دالة إنطاقا من دوال حالة لكل جسيم على نحو تكون فيه ضد متناظرة، و قد وجد :

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha 1}(x_1, t) & \dots & \varphi_{\alpha 1}(x_N, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{\alpha N}(x_1, t) & \dots & \varphi_{\alpha N}(x_N, t) \end{vmatrix}$$

و الذي يدعى بمحدد **سلتر (** Slater) و قد صممت هاته الدالة لتكون ضد متناظرة

ملاحظة: واضح أنه إذا ما توجد جسمين بنفس الحالة ستكون هناك قرنتين α_j و α_i متماثلتين و هو ما يعني انعدام المحدد، و بالتالي انعدام Ψ ، و هو ما يسمى **بمبدأ استبعاد لباولي**

توزيع فيرمي-ديراك:

لنعتبر جملة مشكلة من حالة واحدة يمكن شغلها بواسطة فيرميون موضوعة في تماس حراري تسمح لها بتبادل الطاقة و المادة مع منبع حراري مشكل من N فيرميون(N≫1)

إذا كانت الجملة فارغة سيكون عدد الحالات الممكنة للمنبع $\Omega(U,N)$ و أنتروبي المنبع $S = k_B \log \Omega$

أما عندما تكون مشغولة فإن عدد الحالات للمنبع $\Omega(U-E, N-1$ أما الأنتروبي ممكن كتابته على النحو

$$S(U-E, N-1) = S(U,N) - E\left.\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{v,N} - \left.\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,v}$$

$$S(U-E, N-1) = S(U,N) - \frac{E}{T} + \frac{\mu}{T}$$

$$S(U-E, N-1) = S(U,N) + \frac{\mu - E}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = Ce^{\frac{\mu-E}{k_B T}} = \frac{e^{\frac{\mu-E}{k_B T}}}{\mathfrak{z}}$$

حيث $\mathfrak{z} = 1 + e^{\frac{\mu-}{k_B T}}$

وعليه فان

$$\langle N \rangle = \frac{e^{\frac{\mu-E}{k_B T}}}{1 + e^{\frac{\mu-E}{k_B T}}} \equiv f(E)$$

اي ان

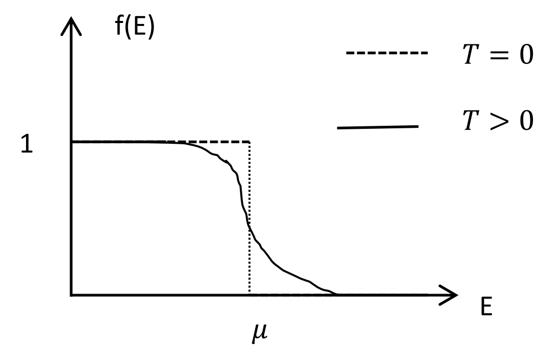
$$\boldsymbol{f(E)=\frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_BT}}+1}}$$

يدعى **بتوزيع فيرمي ديراك (1926)**

واضح ان $0 \leq f(E) \leq 1$. لندرس f(E) بدلالة الطاقة

في الحالة T=0

$$f(E)=\begin{cases} 1 & si \quad E \leq \mu \\ 0 & si \quad E > \mu \end{cases}$$



في الحالة $T>0$

بارتفاع درجة الحرارة تنتقل الفرميونات من المنطقة $E<\mu$ إلى المنطقة $E>\mu$

ان قيمة الكمون الكيميائي بالنسبة لإلكترونات التكافؤ داخل المعدن $\frac{\mu}{k_B}=5000K$ ، و بصفة عامة تكون قيمته متعلقة بدرجة الحرارة ، و قد جرت العادة بأن يرمز للكمون الكيميائي عند0= T بطاقة فيرمي

$$\mu(0)=E_F^0$$

إحصاء بوز–انشتاين:

لنعتبر جملة ما A من البوزونات (جسيمات غير متمايزة ذات سبين صحيح)تتفاعل مع منبع حراري درجة حرارته T تتبادل معه الطاقة و المادة، إذا كانت الجملة A ذات حالة وحيدة فإن دالة التوزيع الكبرى

$$\mathfrak{z} = \sum_N e^{\frac{N\mu - E(N)}{k_B T}}$$

ان كانت E هي طاقة الجملة عندما تكون مشغولة بجسيم واحد، فإن طاقة الجملة عندما تكون مشغولة بـN جسيم هي NE و

لذلك فإن $$\mathfrak{z} = \sum_N e^{\frac{N\mu - NE}{k_B T}} = \sum_N \left(e^{\frac{\mu - E}{k_B T}}\right)^N = \frac{1}{1 - e^{\frac{\mu - E}{k_B T}}}$$

لأنه عمليا $e^{\frac{\mu -}{k_B T}} < 1$

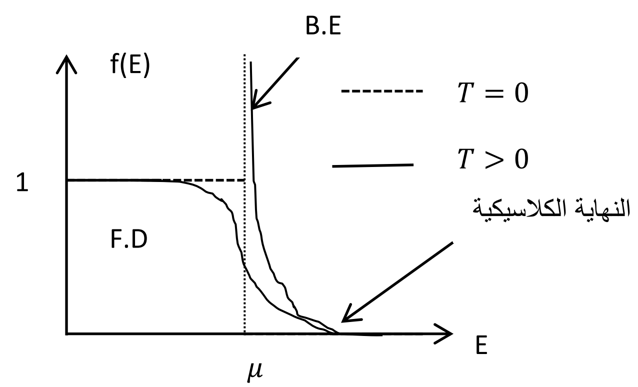
$$\mathfrak{z} = \frac{1}{1 - e^{\frac{\mu - E}{k_B T}}}$$

و هو ما يعني أن:

$$f(E) \equiv \langle N \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E - \mu}{k_B T}} - 1}$$

و يدعى **بتوزيع بوز–إنشتاين**

إذا قمنا بدراسة الدالة (E) وقارنها بسابقتها سنجد أن :



النهاية الكلاسيكية:

إن التوزيع فيرمي– ديراك و بوز اينشتاين يؤولان إلى نفس النهاية بالنسبة لمتوسط عدد إحتلال حالة f(E) بالفعل

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} \pm 1}$$

حتى يكون $f(E) \ll 1$ يجب أن يكون $e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} \gg 1$ بالنسبة لجميع قيم E و هو ما يعني

$$f(E) \cong e^{-\frac{E-\mu}{k_B T}} = \lambda e^{\frac{-E}{k_B T}}$$

وهي عبارة مشابهة لتوزيع ماكسويل بولتزمان و يدعى **بتوزيع ماكسويل – بولتزمان المصحح**

مثال:

أعد إيجاد توزيعي فيرمي– ديراك, بوز اينشتاين بإستخدام طريقة مضاريب لاغرانج

1- لنعتبر سلسلة مستويات الطاقة $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ ذات انحطاط $g_0 , g_1 , \ldots\ldots\ldots\ldots g_n$ يوزع عليها N فيرميون (جسيمات غير متمايزة ذات سبين نصف صحيح) لنجد التوزيع عند الاتزان

حالة الاتزان توافق القيمة العظمى للأنتروبي أي القيمة العظمى للاحتمال الترموديناميكي W_{FD} أي:

$$\text{dlog}\, W_{F.D} = d\log\left(\prod_i \frac{g_i!}{N_i!(g_i-N_i)!}\right) = 0$$

$$\log W_{F.D} = \sum_i \log g_i! - \sum_i \log N_i! - \sum_i \log(g_i - N_i)!$$

بإستخدام تقريب سترلينغ :

$$\log W_{F.D} = \sum_i g_i \log g_i - \sum_i g_i - \sum_i N_i \log N_i + \sum_i^N N_i - \sum_i (g_i - N_i)\log(g_i - N_i) + \sum_i (g_i - N_i)$$

$$\text{dlog}\, W_{F.D} = -\sum_i dN_i \log N_i - N_i \frac{dN_i}{N_i} + \sum_i dN_i \log(g_i - N_i) + (g_i - N_i)\frac{dN_i}{(g_i - N_i)}$$

$$\text{dlog}\, W_{F.D} = \sum_i \log\left(\frac{g_i - N_i}{N_i}\right) dN_i = 0 \qquad (1)$$

$$U = \sum_i N_i \varepsilon_i \qquad \Rightarrow \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \qquad (2)$$

$$N = \sum_i N_i \qquad \Rightarrow \sum_i dN_i = 0 \qquad (3)$$

ندخل مضاريب لاغرانج بحيث نضرب طرفي المعادلة (2) في λ والمعادلة (3) في λ' ثم نجمع المعادلات طرف الى طرف، اي

$$(1)+\lambda(2)+\lambda'(3)$$

فنجد

$$\sum_i \left(\log\left(\frac{g_i-N_i}{N_i}\right)+\lambda\varepsilon_i+\lambda'\right)dN_i=0$$

الأخيرة معادلة خطية لذالك فان معاملات الحدود المستقلة معدومة بالضرورة الرياضية بينما الحدود غير المستقلة فنختار λ,λ' بحيث تنعدم معاملاتها، اي

$$\log\left(\frac{g_i-N_i}{N_i}\right)+\lambda\varepsilon_i+\lambda'=0$$

$$\frac{g_i-N_i}{N_i}=e^{-\lambda\varepsilon_i-\lambda'} \Rightarrow \quad g_i-N_i=N_i e^{-\lambda\varepsilon_i-\lambda'}$$

$$N_i=\frac{g_i}{e^{-\lambda\varepsilon_i-\lambda'}+1}$$

نضع $-\lambda=\beta$ و $e^{-\lambda'}\equiv A$ فنجد

$$\boldsymbol{f(E)=\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{Ae^{\beta\varepsilon_i}+1}}$$

-2 نعتبر سلسلة من المستويات طاقوية $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_n$ ذو انحطاط g_0 , g_1 ,............ g_n على الترتيب توزع عليها N بوزون (جسيمات غير متمايزة ذات سبين صحيح عددها محدد) عددها محدد. علما ان

$$W_{B.E}=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}\cong\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!} \qquad ; \ g_i\gg 1$$

التوزيع عند الاتزان الذي يوافق قيمة عظمى للأنتروبي ، اي

$$\mathrm{d}\log W_{B.E}=d\log\left(\prod_i \frac{(N_i+g_i)!}{N_i!\,g_i!}\right)=0$$

$$\log W_{F.D}=\sum_i \log(N_i+g_i)!-\sum_i \log N_i!-\sum_i \log g_i!$$

بإستخدام تقريب سترلينغ :

$$\log W_{B.E} = \sum_i (N_i + g_i)\log(N_i + g_i) - \sum_i (N_i + g_i) - \sum_i N_i \log N_i + \sum_i^N N_i - \sum_i g_i \log g_i + \sum_i g_i$$

$$\log W_{B.E} = \sum_i (N_i + g_i)\log(N_i + g_i) - \sum_i N_i \log N_i - \sum_i g_i \log g_i$$

$$\mathrm{dlog}\, W_{B.E} = \sum_i dN_i \log\left(N_i + g_i\right) + \left(N_i + g_i\right)\frac{dN_i}{\left(N_i + g_i\right)} - \sum_i dN_i \log N_i - N_i \frac{dN_i}{N_i}$$

$$\mathrm{dlog}\, W_{B.E} = \sum_i \log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) dN_i = 0 \qquad (1)$$

$$U = \sum_i N_i \varepsilon_i \qquad \Rightarrow \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \qquad (2)$$

$$N = \sum_i N_i \qquad \Rightarrow \sum_i dN_i = 0 \qquad (3)$$

ندخل مضاريب لاغرانج بحيث نضرب طرفي المعادلة (2) في λ والمعادلة (3) في λ' ثم نجمع المعادلات طرف الى طرف، اي

$$(1) + \lambda(2) + \lambda'(3)$$

فنجد

$$\sum_i \left(\log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) + \lambda\varepsilon_i + \lambda'\right) dN_i = 0$$

الأخيرة معادلة خطية لذالك فان معاملات الحدود المستقلة معدومة بالضرورة الرياضية بينما الحدود غير المستقلة فنختار λ',λ بحيث تنعدم معاملاتها، اي

$$\log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) + \lambda\varepsilon_i + \lambda' = 0$$

$$\frac{N_i + g_i}{N_i} = e^{-\lambda\varepsilon_i - \lambda'} \Rightarrow \quad N_i + g_i = N_i e^{-\lambda\varepsilon_i - \lambda'}$$

$$N_i = \frac{g_i}{e^{-\lambda\varepsilon_i - \lambda'} - 1}$$

نضع $-\lambda = \beta$ و $e^{-\lambda'} \equiv A$ فنجد

$$f(E) = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{Ae^{\beta\varepsilon_i} - 1}$$

3- نعتبر سلسلة من المستويات طاقوية $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ ذو انحطاط g_0 , g_1 ,............ g_n على الترتيب توزع عليها N بوزون (جسيمات غير متمايزة ذات سبين صحيح عددها محدد) عددها غير محدد(N غير ثابت)، مثل الفوتونات(اشعاع الجسم الاسود) والفونونات(اهتزازات الشبكة البلورية). علما ان

$$W_{B.E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!} \cong \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i!\,g_i!} \qquad ; \quad g_i \gg 1$$

بنفس الطريقة السابقة لكن لما يكون N فان المعادلة رقم (3) غير ممكنة، اي

$$\text{dlog}\, W_{B.E} = \sum_i \log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) dN_i = 0 \qquad (1)$$

$$U = \sum_i N_i \varepsilon_i \qquad \Rightarrow \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \qquad (2)$$

ندخل مضاريب لاغرانج بحيث نضرب طرفي المعادلة (2) في λ ثم نجمع المعادلات طرف الى طرف، اي

$$(1) + \lambda(2)$$

فنجد

$$\sum_i \left(\log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) + \lambda\varepsilon_i\right) dN_i = 0$$

الأخيرة معادلة خطية لذالك فان معاملات الحدود المستقلة معدومة بالضرورة الرياضية بينما الحدود غير المستقلة فنختار λ بحيث تنعدم معاملاتها، اي

$$\log\left(\frac{N_i + g_i}{N_i}\right) + \lambda\varepsilon_i = 0$$

$$\frac{N_i + g_i}{N_i} = e^{-\lambda\varepsilon_i} \Rightarrow \quad N_i + g_i = N_i e^{-\lambda\varepsilon_i}$$

$$N_i = \frac{g_i}{e^{-\lambda\varepsilon_i} - 1}$$

نضع $\beta = -\lambda$ فنجد

$$\boldsymbol{f(E) = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1}}$$