Solution Exo 2 TD N°3

① $M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ Le système est observable puisque Rang $(M_{ob}) = 2$ (car deux vecteurs colonnes sont linéairement indépendants)

② La structure de l'observateur s'écrit :

$$\dot{z}(t) = N z(t) + G u(t) + L y(t)$$
$$\hat{x}(t) = z(t) + H y(t)$$

* Conditions d'existence : $\begin{cases} \text{Rang}(D_x) = 1 \\ \text{Rang}(C D_x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(D_x) = \text{rang}(C D_x)$

* $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda I - A & D_x \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 = n + p$

Les deux conditions d'existence sont vérifiées.

• Conditions de convergence :

$$\begin{cases} PA - NP - LC = 0 \\ PB - G = 0 \\ PD_x = 0 \\ N \text{ stable} \\ PF_x + NHF_y - LF_y \neq 0 \\ HF_y \neq 0 \end{cases} \quad \text{avec } P = I - HC.$$

$PD_x = 0 \Rightarrow (I - HC) D_x = 0 \Rightarrow HCD_x = D_x$

$\Rightarrow H = D_x (C D_x)^+$

$$(CD_x)^+ = \left[(CD_x)^T (CD_x)\right]^{-1} (CD_x)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = D_x (CD_x)^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = (I - HC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$PA - NP - LC = 0 \Rightarrow PA - N(I - HC) - LC = 0$$

$$\Rightarrow N = \underbrace{PA}_{\tilde{A}} - \underbrace{(L - NH)}_{\tilde{L}} C$$

$N = \tilde{A} - \tilde{L} C$ avec $\left(\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix}\right.$

$$M_{(\tilde{A},C)} = \begin{bmatrix} C \\ C\tilde{A} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{(\tilde{A},C)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}\left(M_{(\tilde{A},C)}\right) = 2.$$

Car le minimum de vecteurs lignes ou colonnes linéairement indépendants est égal à 2.

alors la paire $(\tilde{A}, C)$ est observable.

Polynôme désiré (caractéristique) : $P_d = (p+5)(p+20)$
$= p^2 + 25p + 100$

$$\det\left(pI - (\tilde{A} - \tilde{L}C)\right) = p^2 + 25p + 100$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix}\right)\right) = p^2 + 25p + 100$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} p+\tilde{L}_1 & 1 \\ 0 & p+\tilde{L}_2 \end{bmatrix}\right) = p^2 + 25p + 100$$

$$(p+\tilde{l}_1)(p+\tilde{l}_2) = p^2+25p+100$$

$$p^2+(\tilde{l}_1+\tilde{l}_2)p+\tilde{l}_1\tilde{l}_2 = p^2+25p+100$$

$$\begin{cases} \tilde{l}_1+\tilde{l}_2 = 25 \\ \tilde{l}_1\tilde{l}_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{l}_2 = 25-\tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_1(25-\tilde{l}_1) = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{l}_2 = 25-\tilde{l}_1 \\ \tilde{l}_1^2 - 25\tilde{l}_1 + 100 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-25)^2 - 4\times 100 = 225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 15$$

$$\begin{cases} \tilde{l}_{11} = \frac{25+15}{2} = 20 \\ \tilde{l}_{12} = \frac{25-15}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{l}_{21} = 5 \\ \tilde{l}_{22} = 20 \end{cases}$$

on prend la première solution

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$N = \tilde{A} - \tilde{L}C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L} = L - NH \Rightarrow L = \tilde{L} + NH = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$F_1 = PF_x + NHF_y - LF_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$F_2 = HF_y = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \neq 0$$

Les conditions de convergences sont alors vérifiées.

$$e_x(p) = (pI - N)^{-1}(F_1 + pF_2)\, f(p)$$

$$e_y(p) = \Big(\underbrace{C(pI-N)^{-1}(F_1 + pF_2) + F_y}_{G_f(p)}\Big) f(p)$$

$$(pI - N) = \begin{bmatrix} p+20 & -1\\ 0 & p+5\end{bmatrix} \Rightarrow (pI-N)^{-1} = \frac{1}{(p+5)(p+20)}\begin{bmatrix}(p+5) & 1\\ 0 & (p+20)\end{bmatrix}$$

$$(pI-N)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{(p+20)} & \frac{1}{(p+5)(p+20)}\\ 0 & \frac{1}{(p+5)}\end{bmatrix}$$

$$G_f(p) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{(p+20)} & \frac{1}{(p+5)(p+20)}\\ 0 & \frac{1}{(p+5)}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{p+20} & \frac{1}{(p+5)(p+20)}\\ 0 & \frac{1}{(p+5)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & p-5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$G_f(p) = \begin{bmatrix}\frac{1}{p+20} & \frac{p-5}{(p+5)(p+20)}\\ 0 & \frac{p-4}{p+5}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

Table de signatures

	f_1	f_2
e_{y_1}	1	1
e_{y_2}	0	1

on remarque que la signature de f_1 et différente de celle de f_2

~~on remarque~~

donc les défaut sont localisables. alors on prend :

$$r(p) = e_y(p) = G_f(p)\, f(p)$$