Chapitre 3 : Tenseurs des déformations (4 semaines)
Vecteur de déplacement, Tenseur des déformations, Transformation des longueurs et des angles, Déformations principales, Invariants scalaires du tenseur des déformations, Tenseur sphérique et déviateur.

Chapitre. III. Tenseurs des déformations

III. 1. Introduction [4].

Lorsqu'un solide est soumis des sollicitations extérieures, les particules qui le composent se déplacent dans l'espace. De ce fait, le corps du solide peut être soumis à différents type de mouvement de type rigide ou à des déformations provoquées par les déplacements relatifs des particules entre elles. Cette dernière transformation donne lieu à des variations d'angles et d'angle que l'on va étudier dans ce chapitre. Nous allons mettre en évidence et construire le tenseur des déformations qui est en quelques sortes la grandeur duale du tenseur des contraintes.

- **Les différentes transformations du solide**

Un petit élément de matière du solide peut subir plusieurs transformations. **Figure III.1.** Ces transformations peuvent se décomposer en translations et rotations rigides et en déformations dans le milieu.
Translation et rotation sont des mouvements de corps rigides qui n'ont aucune conséquence sur la forme finale du solide. Seule la déformation induit des variations de longueurs et d'angle dans la structure du solide. Hormis les mouvements de corps rigide la déformation est la seule grandeur mesurable par le mécanicien lorsqu'un solide est sollicité par des efforts extérieurs. Les efforts et les contraintes sont déduits à partir des lois de comportement du matériau que nous verrons dans le chapitre suivant.
En principe, lorsque plusieurs transformations sont appliquées à un solide, l'état final n'est pas qu'une simple superposition des effets individuels de chacune des sollicitations.
Cependant, lorsque les transformations induisent de petites déformations, on pourra appliquer le principe de superpositions et additionner par exemple les déformations et les distorsions (variations d'angle) provoqués en un point donné par l'ensemble des sollicitations.
Ce principe implique que les calculs sont réalisés sur la configuration initiale du solide.

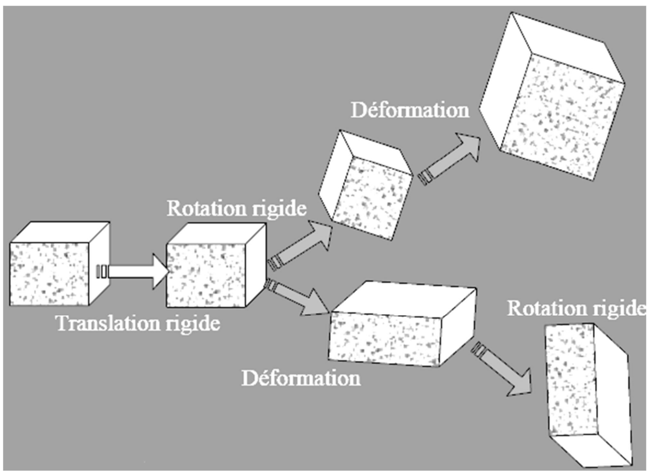

Figure III.1. Les différentes transformations du solide [4].

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations**. **Figure III.2**.

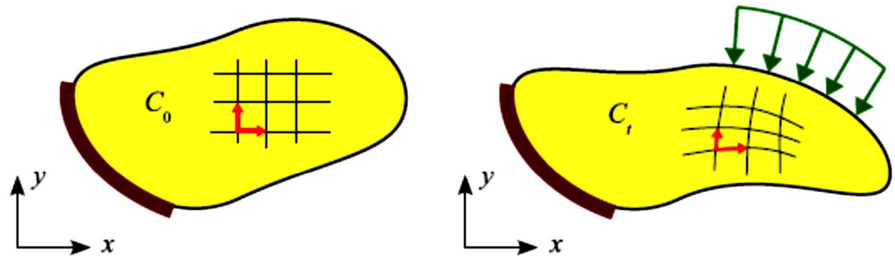

Figure. III.2. Déformations dans un solide

III.2. Configuration, vecteur déplacement [4].

Le volume occupé par le solide à l'instant t est noté C_t et appelé **configuration courante**.
La **configuration initiale** C_0 est la configuration de référence.
Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante **figure III.3** :

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{x}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

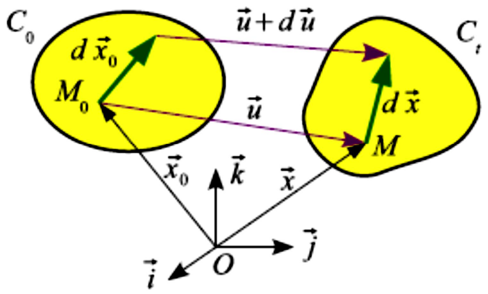

Figure .III.3. Transformation d'un point et d'un vecteur

On appelle **vecteur déplacement** du point M_0 le vecteur :

$$\vec{u}(M_0;t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

Ou u, v et w sont des fonctions continues et dérivables de x_0, y_0 et z_0, d'où :

$$\vec{x}\,(M_0;t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(M_0;t)$$

Les coordonnées du point M s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0,y_0,z_0;t) \\ y(x_0,y_0,z_0;t) \\ z(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0,y_0,z_0;t) \\ v(x_0,y_0,z_0;t) \\ w(x_0,y_0,z_0;t) \end{Bmatrix}$$

x_0, y_0 et z_0 sont les **coordonnées de Lagrange** et la description est dite lagrangienne.

Cette équation définit la **transformation** qui fait passer le solide de la configuration initiale C_0 à la configuration C_t.

III.3. Transformation des vecteurs : tenseur gradient de la transformation

Le vecteur infiniment petit d $\vec{x}_0$ en M_0 devient d$\vec{x}$ en M dans la configuration C_t

$$d\vec{x} = d\,\vec{x}_0 + d\,\vec{u}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\{dx\} = \{dx_0\} + \{du\} = (\,[\,I\,] + [L]\,)\,\{dx_0\} = [F]\,\{dx_0\}$$

Ou:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1+\frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1+\frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad , \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

$[F\,]$ est le **tenseur gradient de la transformation** (ou **tenseur gradient de la déformation**). **[3].**

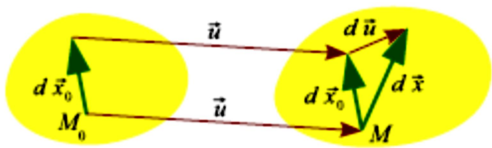

Figure. III .4 . Transformation du vecteur d $\vec{x}_0$

III.4. Déformation angulaire et en dilatation, figure III.5. [4].

Pour un barreau sollicité en traction pure, l dilatation linéique dans la direction longitudinale ox est $e_x = (\Delta l/l)$, la dilatation linéique dans la direction transversale oy est $(\Delta b/b)$. On sait que ces deux dilatations sont liées par "υ" le coefficient de poisson.

$$e_y = -\,\upsilon\, e_x$$

Si l'on trace avant l'application des forces extérieures provoquant la contrainte de traction σ, deux segments rectangulaires OA et OB diriges suivant ox et oy, les déformations produites par la sollicitation de traction ont pour effet d'allonger le segment OA de la quantité $\Delta\,(OA) = OA\,.\,e_x$ et raccourcir le segment OB de la quantité $\Delta(OB) = OB\,.\,e_y$; mais l'angle droite $\widehat{AOB}$ n'a pas varié : il reste droite pendant toute la déformation élastique de traction pure.

Considérons encore une fois les deux segments rectangulaires OA et OB tel que OA est incliné de l'angle α sur la direction longitudinale o_x , après déformation les points A et B se sont déplacés par rapport à O, ils sont devenus e A' et B' . Non seulement les longueurs OA et OB ont variés, mais l'angle droite $\widehat{AOB}$ est devenu $\widehat{A'OB'}$ qui n'est plus un angle droite.

Nous voulons calculer cette variation angulaire $\widehat{AOB} - \widehat{A'OB'}$ à laquelle on donne le nom **d'angle de glissement** ou **angle de distorsion** et que l'on représente par :

$$\gamma_\alpha = \widehat{AOB} - \widehat{A'OB'} = 90° - \widehat{A'OB'}$$

Posons $\overline{OA} = \Delta s$

Soit OH la projection de OA sur la direction ox

$$OH = OA \,.\, \cos\alpha = \Delta s.\cos\alpha$$

Sous l'effet de la dilatation longitudinale seule, le point A est devenu en A_1.
L'allongement $\boldsymbol{AA_1}$ est tel que:

$$e_x = (AA_1 / OH)$$

$$AA_1 = e_x \,.\, OH = e_x \,.\, \Delta s \,.\, \cos\alpha$$

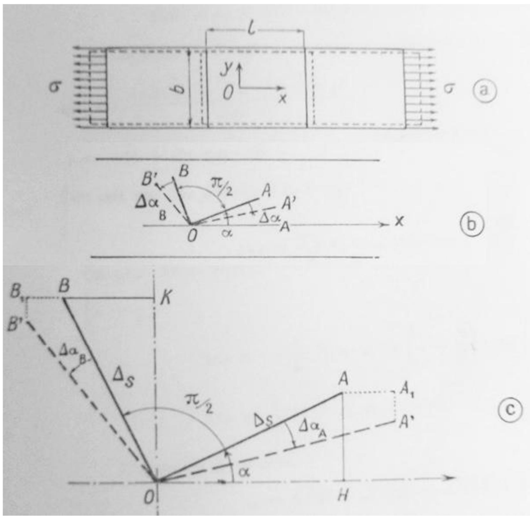

Figure III.5. Dilatation et rotation **[4].**

Sous l'action de la dilatation transversal le point A est devenu en A' ; tel que

$$e_y = (A_1A' / AH)$$

$$A_1A' = e_y \,.\, AH = e_y .\, \Delta s.\, \sin\alpha = \upsilon.\, e_x.\, \sin\alpha$$

La variation de l'angle α est donc mesurée par $\Delta\alpha_A = \widehat{AOA'}$

$\Delta\alpha_A = -(A_1A' \cos\alpha + AA_1 \sin\alpha) / \Delta s = -(\upsilon e_x \sin\alpha \cos\alpha + e_x \Delta s \sin\alpha \cos\alpha) / \Delta s$

$= -(1+\upsilon)\, e_x \sin\alpha \cos\alpha$

Or on sait que par définition: $e_x = \sigma / E$

$$\Delta\alpha_A = -(\sigma/E).\ (1+\upsilon)\ \sin\alpha\ \cos\alpha$$

De même façon on peut calculer le déplacement angulaire $\Delta\alpha_B$ du point B

$$\Delta\alpha_B = \overset{\frown}{BOB'}$$

On peut utiliser la relation obtenue pour $\Delta\alpha_A$ en remplaçant α par $(\alpha + \Pi/2)$

$$\Delta\alpha_B = -(\sigma/E).\ (1+\upsilon)\ \sin(\alpha+\Pi/2)\ \cos(\alpha+\Pi/2)$$

$$\Delta\alpha_B = (\sigma/E).\ (1+\upsilon)\ \sin\alpha\ \cos\alpha$$

L'angle de glissement

$$\gamma_\alpha = \overset{\frown}{AOB} - \overset{\frown}{A'OB'} = \overset{\frown}{A'OA} + \overset{\frown}{BOB'}$$

$$\gamma_\alpha = -\overset{\frown}{AOA'} + \overset{\frown}{BOB'} = -\Delta\alpha_A + \Delta\alpha_B$$

Soit en valeur absolue

$$\gamma_\alpha = (\sigma/E).\ (1+\upsilon)\ \sin 2\alpha$$

On a calculé précédemment

$$\tau_\alpha = (1/2)\ \sigma \sin 2\alpha$$

Par suite

$$\tau_\alpha = (E.\gamma_\alpha) / 2(1+\upsilon)$$

Cette relation est évidemment générale et vérifiée quel que soit l'angleα.

On a donc, entre la contrainte de glissement et l'angle de glissement la relation:

$$\tau = (E.\gamma) / 2(1+\upsilon)$$

Par ailleurs, on a vu que τ et γ sont liés par la relation $\tau = \gamma$. G, G étant le module d'élasticité transversale ou le module de Colomb. En conséquence:

$$G = E/2(1+\upsilon)$$