

**Chapitre 4 : Lois de Hooke (Relations contraintes – déformations) (4 semaines)**  
Formulation en contraintes, Formulation en déformations, Formulation Thermo-élastique.

## CHAPITRE IV – Lois de Comportement

### IV. 1. Expérimentation

#### IV.1. 1. Introduction

Expérimentalement lorsque un milieu est soumis à des actions mécaniques extérieures de type force ou couple, celui-ci réagit en se déformant. Ces déformations et déplacements dépendent fortement du type de matériau sollicité. En fait chaque milieu possède ses propres caractéristiques et est donc régi par des lois de comportement qui déterminent sa réponse. Les essais expérimentaux sont précisément destinés à identifier le comportement mécanique du matériau à l'aide de relations qui lient les forces intérieures mises en jeu et la réponse sous forme de déformation et déplacement dans la structure et inversement. [5].

Pour caractériser un matériau, nous disposons de plusieurs méthodes expérimentales. Ces essais expérimentaux sont conçus pour identifier le comportement du milieu soumis à différentes sollicitations. Dans le cadre de la résistance des matériaux classique, la caractérisation porte sur un domaine de sollicitation qui ne produit pas de transformations irréversibles. C'est donc uniquement le comportement élastique que nous serons amenés à identifier. Par ailleurs nous nous intéresserons uniquement aux matériaux dits à comportement élastiques linéaires. La linéarité est entendue au sens d'une relation de proportionnalité entre la sollicitation et la réponse du milieu.

Nous considérons donc un milieu homogène isotrope dans lequel nous mesurons de petites déformations. Par ailleurs le milieu est dit dans son état naturel, c'est-à-dire que si les efforts appliqués sur ce milieu sont nulles alors les contraintes internes sont nulles. Dans le cas des petites transformations nous admettons le principe de superposition que nous rappelons ci-dessous.

#### *Principe de superposition*

Si  $n$  systèmes de forces extérieurs indépendants provoquent séparément des déformations élastiques et des contraintes, leur application simultanée ou successive provoquera des déformations élastiques et des contraintes qui seront la somme géométrique des déformations et des contraintes prises séparément. [5].

#### IV.1. 2. Essais mécaniques

##### *Etat de traction-compression uniaxial*

L'essai de traction compression est généralement réalisé sur un barreau dont la géométrie est conçue en fonction du type d'essai prévu. Dans le cas de la traction, essai le plus classique dans le cas des métaux, la section peut être constante ou variable. Dans notre cas nous considérons un barreau à section rectangulaire ou circulaire. Lors de l'essai de traction, on observe une réponse de l'éprouvette en plusieurs stades (Figure IV.1). Nous nous intéressons uniquement à la phase de comportement élastique linéaire.

Nous observons alors que la force appliquée sur l'éprouvette est proportionnelle à l'allongement. Pour s'affranchir de la géométrie, nous allons raisonner sur des grandeurs spécifiques. Nous utiliserons la contrainte et la déformation au lieu de la force appliquée et du déplacement. Supposons que l'effort est appliqué dans la direction axiale de l'éprouvette, soit 1 e cette direction. Nous enregistrons un effort  $F = F\vec{e}_1$  sur l'une des extrémités de l'éprouvette et un allongement  $\delta$  dans cette même direction. Nous définissons alors :

- la contrainte longitudinale par  $\sigma_1 = F / S$ , où  $S$  est la section de l'éprouvette
- la déformation longitudinale  $\varepsilon_1 = \delta / l$ , où  $l$  est la base de mesure de l'allongement.

Du fait de la proportionnalité de ces deux grandeurs dans la phase élastique linéaire nous pouvons écrire :

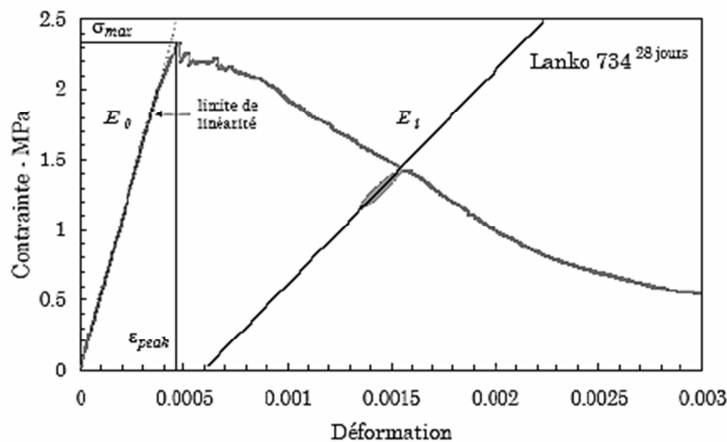
$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$

Le coefficient de proportionnalité  $E$  décrit la rigidité du matériau et est appelé Module de Young ou module d'élasticité. Si nous mesurons la déformation dans les directions transverse  $e_2$  et  $e_3$

par exemple nous trouverons  $\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ .

Le coefficient de proportionnalité  $\nu$  entre les déformations axiale et transversale est appelé coefficient de Poisson.

23 Pour un milieu continu le coefficient de Poisson est compris entre 0 et 0.5. Ces relations sont algébriques et restent donc valables pour une sollicitation de compression. [5].



**Figure IV.1.** Essai de traction sur une éprouvette de béton

## IV.2. Relations de comportement en élasticité

### IV.2. 1. Etat de traction et compression dans deux directions orthogonales

Considérons une plaque centrée sur le repère associé à la base  $(O; x, x, x)$   $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Cette plaque est rectangulaire et est constituée d'un matériau homogène isotrope à comportement élastique et linéaire de module d'élasticité  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ .

Cette plaque est soumise dans un premier temps à un effort de traction  $F_1 \vec{e}_1$  et  $-F_1 \vec{e}_1$  sur ses deux extrémités opposées (Figure 32). Nous superposons dans un deuxième temps un effort  $F_2 \vec{e}_2$  et  $-F_2 \vec{e}_2$  sur les deux autres extrémités.

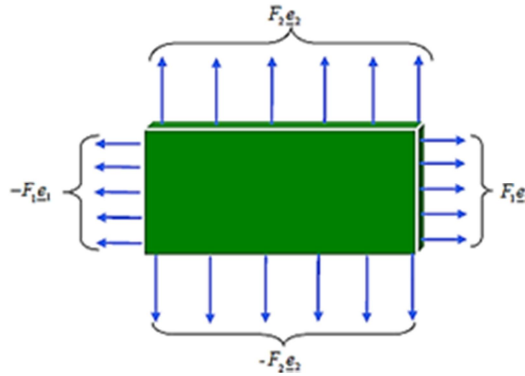
On note  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = F_1 / S_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = F_2 / S_2$$

Exprimons les déformations dues à  $F_1 \vec{e}_1$ :

Suivant  $\vec{e}_1$   $\epsilon_1^1 = \sigma_1 / E$

Suivant  $\vec{e}_2$   $\epsilon_1^2 = -\nu (\sigma_1 / E)$ .



**Figure IV.2.** Traction bi axiale.

Suivant  $\vec{e}_2$   $\epsilon_2^2 = \sigma_2 / E$

Suivant  $\vec{e}_1$   $\epsilon_2^1 = -\nu (\sigma_2 / E)$ .

24

Appliquons le principe de superposition pour écrire les déformations totales : [5].

- Suivant  $\vec{e}_1$  :  $\epsilon_1 = \epsilon_1^1 + \epsilon_2^1 = \sigma_1 / E - \nu (\sigma_2 / E)$ .
- Suivant  $\vec{e}_2$  :  $\epsilon_2 = \epsilon_2^2 + \epsilon_1^2 = \sigma_2 / E - \nu (\sigma_1 / E)$ .
- Par soustraction des deux relations on trouve:  $\epsilon_1 - \epsilon_2 = [(1 + \nu) / E] \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$

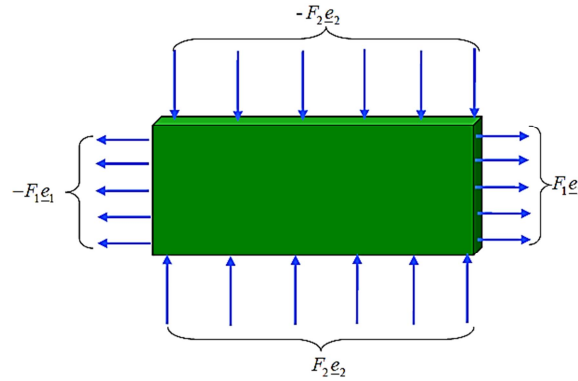
**IV.2.2. Etat de cisaillement pur**

On raisonne de nouveau sur un état de contrainte de traction compression sur la même plaque. Nous imposons un effort de traction dans la direction  $\vec{e}_1$  et un effort de compression dans la direction  $\vec{e}_2$  telle qu'apparaissent dans les deux directions deux contraintes *de même intensité* (Figure IV-3). Ce qui donne

$$\sigma_1 = F_1 / S_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = F_2 / S_2 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -\sigma_1$$

(traction suivant  $\vec{e}_1$  et compression suivant  $\vec{e}_2$  ).

Du fait de la configuration du chargement, les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont les directions principales du problème.



**Figure IV.3.** Essai de Traction-compression suivant deux directions

Pour un état plan des contraintes (ce qui est le cas dans la plaque chargée dans son plan), le vecteur contrainte en tout point du milieu peut être exprimé dans la base constituée par la normale  $\vec{n}$  et le vecteur tangent  $\vec{t}$  avec les composantes suivantes :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \\ \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \end{cases}$$

Dans ces deux expressions,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales et  $\varphi$  est défini par :

$$\varphi = (\vec{e}_1, \vec{n})$$

Prenons:  $\varphi_1 = \pi/4$  et  $\varphi_2 = -\pi/4$

Les facettes associées à ces deux directions ont les normales respectives  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ . On obtient pour ces deux facettes les vecteurs contraintes suivants :

$$\underline{T}(M, \underline{n}_1) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_1 = \begin{cases} \sigma^1 = 0 \\ \tau^1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau \end{cases}$$

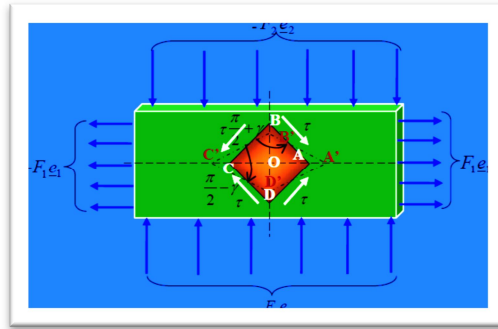
$$\underline{T}(M, \underline{n}_2) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_2 = \begin{cases} \sigma^2 = 0 \\ \tau^2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\tau^1 = -\tau \end{cases}$$

On retrouve ici la propriété des composantes tangentielles du vecteur contrainte qui ont des valeurs de signes opposés.

Nous remarquons que les contraintes normales sur ces deux facettes ainsi définies sont nulles.

Sur ces deux facettes agit un état de cisaillement pur.

Si nous traçons un carré ABCD autour du centre O de la plaque. Nous remarquerons que celui-ci se déformé pour former un losange. [5].



**Figure.VI.4.** Essai de traction -Compression suivant deux directions.

Nous allons chercher une relation entre la composante tangentielle  $\tau$  et la variation d'angle  $\gamma$  ou distorsion.

Les allongements (rétrécissements) unitaires des diagonales donnent :

$$\varepsilon_1 = \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{OB' - OB}{OB} = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

Par ailleurs :

$$\tan(\angle B'O, \angle B'A') = \frac{OA'}{OB'} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2}$$

Dans cette expression, nous prenons  $\gamma$  petit, ce qui permet de confondre la tangente et son angle.

Supposons que la longueur de la demi-diagonale avant déformation soit égale à  $a$ . Alors :

$$OA' = a\left(1 + \frac{\tau}{E}(1 + \nu)\right)$$

$$OB' = a\left(1 - \frac{\tau}{E}(1 + \nu)\right)$$

Ce qui donne:

$$\frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} = \frac{1 + \frac{\tau}{E}(1 + \nu)}{1 - \frac{\tau}{E}(1 + \nu)} \Rightarrow \gamma/2 = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) ..$$

La relation reliant la contrainte de cisaillement à la distorsion est finalement donnée par :  $\tau = G \cdot \gamma$ ,

dans laquelle  $G$  est le module d'élasticité transversal obtenu à l'aide de la relation :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu$$

$\mu$  est aussi appelé coefficient de Lamé.

### IV.2. 3. Loi de Hooke généralisée

Cette loi permet de définir la loi de comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène isotrope et pour un état de sollicitation quelconque.

Plaçons-nous dans une base quelconque  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Désignons par  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  le tenseur agissant dans le milieu et par

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$  le tenseur des déformations associé.

L'état des contraintes peut être considéré comme la superposition des états de sollicitations suivants :

- 3 états de traction uniaxiale suivant les axes associés à la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- 3 états de cisaillement pur dans les plans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auxquels correspondent trois états de déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{22}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_{12}}{2\mu} & 0 \\ \frac{\sigma_{21}}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{31}}{2\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ 0 & \frac{\sigma_{32}}{2\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

La superposition des états de contraintes induit dans le cas des petites déformations la

superposition de l'état des déformations :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(4)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(5)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(6)} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(4)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(5)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(6)}$$

Nous écrivons la relation qui lie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \end{cases}$$

Plus généralement on écrit la loi de Hooke sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (Tr \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

Cette expression s'inverse sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda (Tr \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}}$$

28 Dans cette dernière relation interviennent les deux coefficients de Lamé donné en fonction de E et  $\nu$  : **[5]**.

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$