CHAP II : Aspect Statique de la Mécanique des Milieux Continus :

Étude du tenseur contrainte.

2-1: étude de l'état de contrainte en un point d'un milieu continu représenté par un parallélogramme rectangle élémentaire.

soit un parallélépipède rectangle infiniment petit d'arrêtes dx, dy, dz respectivement selon les axes coordonnées de référence Ox_i (Ox, Oy, Oz) :
ce parallélépipède a trois (03) **faces coordonnées** ou **facettes coordonnées** qui sont adjacentes aux axes coordonnées et trois (03) autres faces non coordonnées qui sont opposées aux trois premières faces coordonnés.

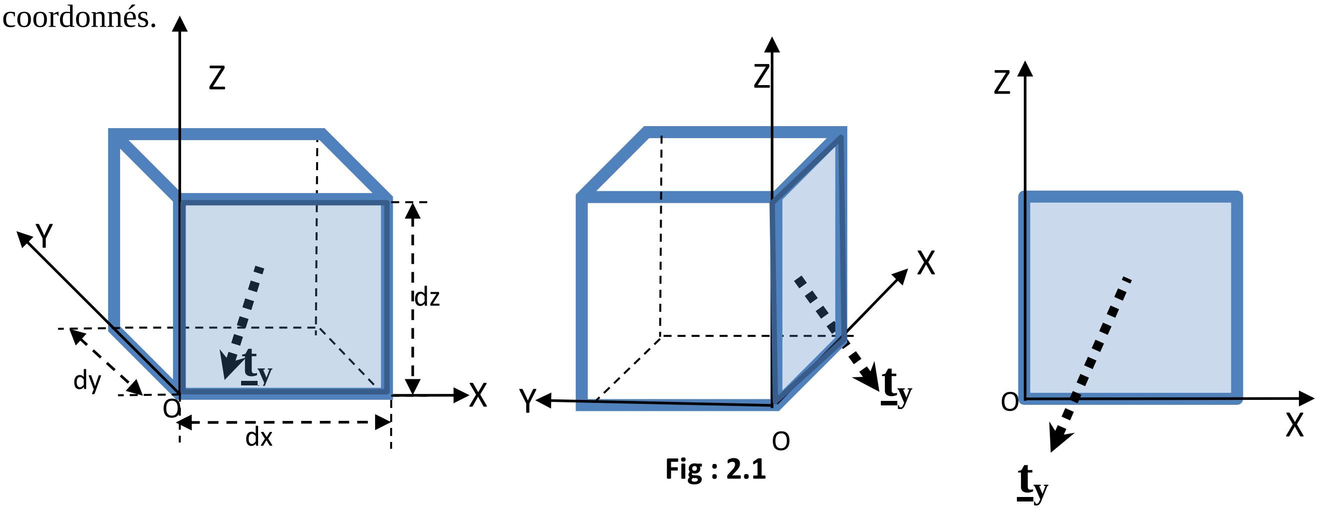


Fig : 2.1

soit un vecteur contrainte $\underline{\mathbf{t}}_y$ appliqué sur la facette coordonnée de normale Oy, orienté d'une façon quelconque.

On peut décomposer ce vecteur $\underline{\mathbf{t}}_y$ en une composante σ normale à la facette de normale Oy et une composante τ tangentielle à cette même facette :

$$t_y = \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_y \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

De même, on peut décomposer τ_y en une composante tangentielle τ_{yx} dirigée selon Ox et une autre composante τ_{yz} dirigée selon Oz.

Donc on peut écrire :

$$t_y = \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (2.2)$$

Ce raisonnement peut être effectué pour les deux autres faces coordonnées à savoir, la face coordonnée de normale Ox et la face coordonnée de normale Oz.

Ce qui conduit à une représentation du tenseur contrainte au point O de ce parallélépipède élémentaire, comme illustré à la figure 2.3:

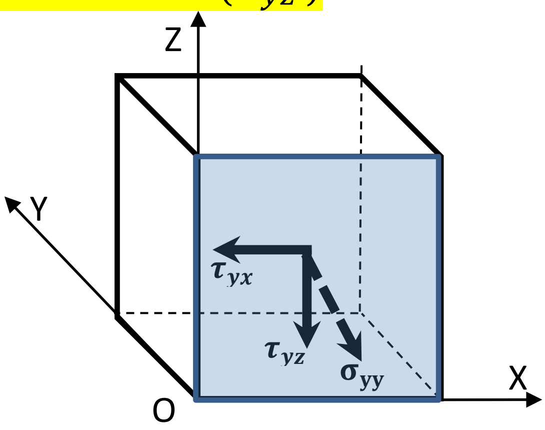


Fig : 2.2

Sur chaque facette coordonnée, agit donc :

Une contrainte normale et deux contraintes tangentielles.

Une contrainte $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ est une contrainte appliquée sur la facette de normale Ox_i dirigée selon l'axe Ox_j.

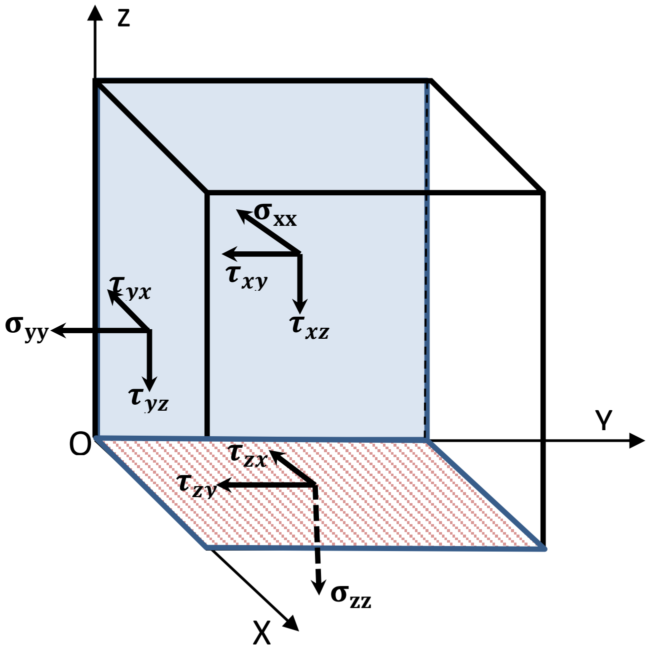


Fig : 2.3

ce qui peut être caractérisé par le tenseur contrainte :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$ En notation indicielle. (2.3)

Ou

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{pmatrix}$$ En notation d'ingénieur. (2.4)

Chacune des composantes de ces contraintes est fonction des coordonnées du point O.
Par conséquent ces contraintes sur les facettes non coordonnés vont subir des accroissements dx, dy, dz respectivement aux coordonnées x, y, z.
Si on appelle σ_x^* l'accroissement de la contrainte σ_x relativement à la coordonnée x on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx. \\ \tau_{xz}^* &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

La facette non coordonnée de normale Oy opposée à celle coordonné de normale Oy agissent les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_y^* &= \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy. \\ \tau_{yx}^* &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy. \\ \tau_{yz}^* &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Et on obtient de la même façon les contraintes sur la facette non coordonné de normale Oz :

$$\sigma_z^* = \sigma_{yz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz.$$
$$\tau_{zx}^* = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz. \qquad (2.7)$$
$$\tau_{zy}^* = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz.$$

Pour ce qui est de la convention de signe :
Une contrainte normale est comptée positivement en traction, négativement donc en compression.
Une contrainte tangentielle est comptée positivement lorsque elle se dirige vers l'axe coordonnée le plus voisin, pour les facettes non coordonnés le signe des contraintes normale est le même, par contre pour les contraintes tangentielles, le signe est le contraire de celui des contraintes tangentielles des facettes cordonnés.

2-2: Principe de réciprocité des contraintes tangentielles ou principe de la symétrie du tenseur contrainte :

Reprenant le même parallélépipède rectangle (vue au §1) de dimension unitaire, dx,dy,dz, soumis sur ces six faces aux contraintes indiquées et aux forces de volume caractéristique de la matière (force de gravité :masse volumique ou poids par unité de volume ; forces magnétiques, forces thermiques etc) :

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

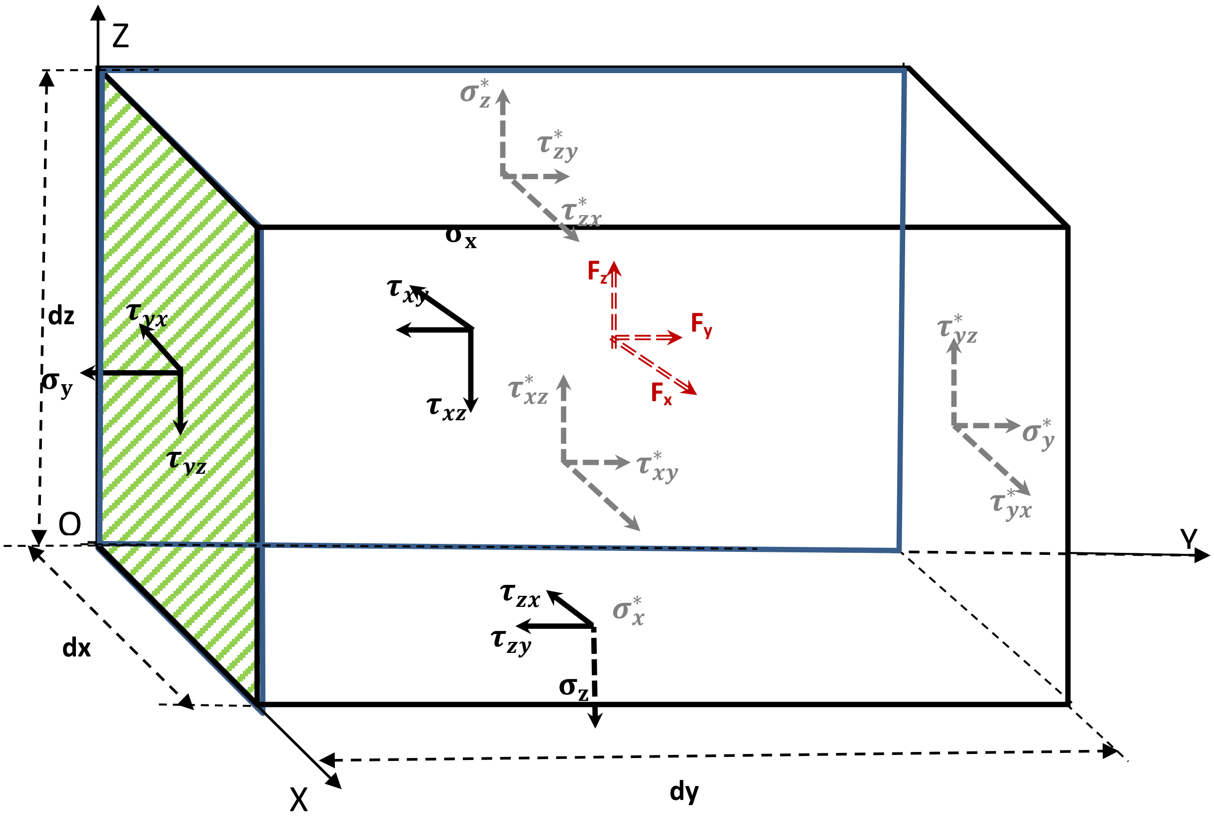


Fig : 2.4

Sous l'action de ces forces de contraintes et de volumes, le parallélépipède élémentaire est en équilibre de rotation autour de chacun des trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz.

Prenons l'exemple de la rotation autour de l'axe Ox et le sens trigonométrique comme rotation positive :

$\tau_{xy}.dy\,dz\,\frac{dz}{2}$ $-\tau_{xz}.dy\,dz\,\frac{dy}{2} + \sigma_y.dx\,dz\,\frac{dz}{2} - \tau^*_{xy}.dy\,dz\,\frac{dz}{2} + \tau^*_{xz}.dy\,dz\,\frac{dy}{2} - \sigma^*_y.dx\,dz\,\frac{dz}{2} + \tau^*_{yz}.dx\,dz\,dy - \sigma_z.dx\,dy\frac{dy}{2} + (\sigma_{yz} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz).dx\,dy\,\frac{dy}{2} - \tau^*_{zy}.dx\,dy\,dz - F_y\,dx\,dy\,dz\,\frac{dz}{2} + F_z\,dx\,dy\,dz\,\frac{dy}{2} = 0$

En remplaçant les composantes étoilées par leurs valeurs respectives (2.5), (2.6), (2.7) :

$\tau_{xy}.dy\,dz\,\frac{dz}{2}$ $-\tau_{xz}.dy\,dz\frac{dy}{2} + \sigma_y.dx\,dz\,\frac{dz}{2} - (\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx).dy\,dz\,\frac{dz}{2} + (\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx).dy\,dz\,\frac{dy}{2} - (\sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy).dx\,dz\,\frac{dz}{2} + (\tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy).dx\,dz\,dy - \sigma_z.dx\,dy\frac{dy}{2} + (\sigma_{yz} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz).dx\,dy\,\frac{dy}{2} - (\tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz).dx\,dy\,dz - F_y\,dx\,dy\,dz\,\frac{dz}{2} + F_z\,dx\,dy\,dz\,\frac{dy}{2} = 0$

Après avoir simplifié et négliger les termes du quatrième ordre devant ceux du troisième on obtient :

$$\tau_{yz}\,dx\,dz\,dy - \tau_{zy}\,dx\,dy\,dz = 0$$

Les accroissements dx, dy, dz étant des quantités infiniment petits mais différents de zéro.
Donc on peut simplifier par $dx\,dz\,dy$ et on obtient alors la relation :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad (2.8)$$

De même en faisant l'équilibre autour de l'axe Oy on peut obtenir :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (2.9)$$

De même en faisant l'équilibre autour de l'axe Oz on peut obtenir :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (2.10)$$

Ou en rassemblant les trois équations écrites en notation d'ingénieur, donnent :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall\ i \neq j \qquad (2.11)$$

Ces trois égalités font que le tenseur contrainte σ_{ij} est symétrique.

Nota : pour plus de compréhension, les étudiants sont tenus à reprendre, l'équilibre de rotation du parallélépipède élémentaire autour des deux autres axes restants.

2-3: Équations d'équilibre en volume ou équation de Cauchy

Si on s'intéresse à présent à l'écriture de l'équilibre du parallélépipède élémentaire (Fig :2.4) à la translation selon les axes coordonnés :
On commence par l'équilibre à la translation selon l'axe Ox :

$-\sigma_x.dy\,dz$ $-\tau_{yx}.dx\,dz + \sigma^*_x.dy\,dz + \tau^*_{yx}.dx\,dz - \tau_{zx}.dx\,dy + \tau^*_{zx}.dx\,dy + F_x\,dx\,dy\,dz = 0$

En remplaçant les composantes étoilées par leurs valeurs respectives (2.5), (2.6), (2.7) :

$-\sigma_x.dy\,dz$ $-\tau_{yx}.dx\,dz + (\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx).dy\,dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy).dx\,dz - \tau_{zx}.dx\,dy + (\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz).dx\,dy + F_x\,dx\,dy\,dz = 0.$

En faisant remarquer le principe de réciprocité des contraintes tangentielles, les accroissements dx, dy, dz étant des quantités infiniment petits mais différents de zéro.
Donc on peut simplifier par $dx\,dz\,dy$ et on obtient alors la relation :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right).dy\,dz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right).dx\,dz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right).dx\,dy + F_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \qquad (2.12)$$

En écrivant cette équation en notation indicielle :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \qquad (2.13)$$

en remarquant le principe de réciprocité des contraintes tangentielles : $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ et $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ et l'opérateur différentielle $\partial x_1 = \partial_1$ et $\partial x_i = \partial_i$, (2.13) s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial 1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial 2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial 3} + F_1 = 0 \qquad (2.14)$$

Et on faisant remarquer que dans (2.15) , il y a un indice qui se développe de 1 jusqu'à 3, ce qui peut être réécrit en usant de la convention d'Einstein :

$$\sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial j} + F_1 = 0 \qquad (2.15)$$

Ou $$\partial_j\,\sigma_{1j} + F_1 = 0 \qquad (2.16)$$

De même l'équilibre selon l'axe Oy ou Ox_2 donne :

$$\partial_j\,\sigma_{2j} + F_2 = 0 \qquad (2.17)$$

l'équilibre selon l'axe Oz ou Ox_3 donne :

$$\partial_j\,\sigma_{3j} + F_3 = 0 \qquad (2.17)$$

Et les équations d'équilibre en volume quel que soit l'axe, s'écrivent alors :

$$\partial_j\,\sigma_{ij} + F_i = 0 \qquad (2.20)$$

Ce sont les équations d'équilibre en volume ou « **équations de Cauchy** »

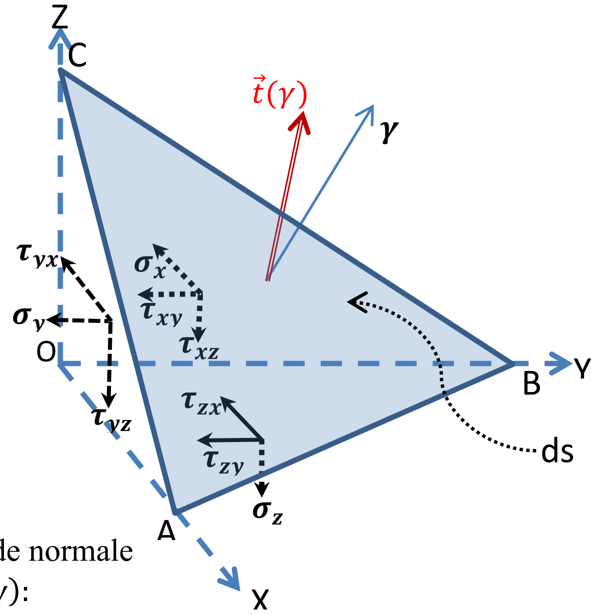
2-4: États de contrainte sur une facette inclinée.

Soit le tenseur contrainte σ_{ij} définie dans un système cartésien directe (Oxyz).

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Soit γ la normale de la facette ABC :

$$\gamma = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma, OX) \\ \cos(\gamma, OY) \\ \cos(\gamma, OZ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$



Pour trouver l'état de contrainte agissant sur la facette de normale qui consiste à chercher les composantes du vecteur $\vec{t}(\gamma)$:
ds étant l'aire de la facette ABC de normale .

Fig : 2.5

Écrivons l'équilibre de translation du prisme OABC, tout en négligeant son poids propre devant les contraintes agissant sur ses faces.
Équilibre de translation selon l'axe Ox :

$$t_x.ds - \sigma_x ds\cos(\gamma, Ox) - \tau_{yx} ds\cos(\gamma, Oy) - \tau_{zx} ds\cos(\gamma, Oz) = 0$$

$t_x.ds - \sigma_x\, l\, ds - \tau_{yx} m\, ds - \tau_{zx}\, n\, ds = 0$ simplifions par ds :

$t_x = \sigma_x\, l + \tau_{yx} m + \tau_{zx}\, n$ qui peut s'écrire davantage :

$t_x = \sigma_{xx}\, l + \tau_{yx} m + \tau_{zx}\, n$

ou encore :

$$\mathbf{t_1 = \sigma_{11}\,\gamma_1 + \sigma_{21}\gamma_2 + \sigma_{31}\,\gamma_3 = \sum_{i=1}^{i=3} \sigma_{i1}\,\gamma_i} \quad (2.21)$$

nous pouvons trouver de la même façon l'équilibre selon l'axe Oy :

$$\mathbf{t_2 = \sigma_{12}\,\gamma_1 + \sigma_{22}\gamma_2 + \sigma_{32}\,\gamma_3 = \sum_{i=1}^{i=3} \sigma_{i2}\,\gamma_i} \quad (2.22)$$

et l'équilibre selon l'axe Oz :

$$\mathbf{t_3 = \sigma_{13}\,\gamma_1 + \sigma_{23}\gamma_2 + \sigma_{33}\,\gamma_3 = \sum_{i=1}^{i=3} \sigma_{i3}\,\gamma_i} \quad (2.23)$$

Sous forme de notation d'ingénieur matricielle les trois équations ci-dessus énumérées peuvent être formulées :

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Ou sous forme :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Les expressions (2.25) peuvent s'écrire davantage en une seule formulation :

$\mathbf{t_j = \sigma_{ij}\,\gamma_i}$ ou

$$\mathbf{t_i = \sigma_{ij}\,\gamma_j} \quad (2.26)$$

le vecteur contrainte $\vec{t}(\gamma) = t_i$ peut être décomposé en une composante normale $\boldsymbol{\sigma}$ et une composante tangentielle τ :
pour trouver la composante normale, il suffit de projeter le vecteur contrainte $\vec{t}(\gamma)$ sur la normale $\vec{\gamma}$.
Ceci revient également à faire le produit scalaire de t_i et de γ_i.

$$\boldsymbol{\sigma = t_i\,\gamma_i = \sigma_{ij}\,\gamma_i\gamma_j} \quad (2.27)$$

Sous explicite sous forme d'ingénieur matricielle :

$$\sigma = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} (l \quad m \quad n) = (l \quad m \quad n) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

ou

$$\sigma = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn \quad (2.28)$$

ou sous forme tensorielle indicielle :

$$\sigma = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3) = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ou $$\sigma = \sigma_{11}\gamma_1^2 + \sigma_{22}\gamma_2^2 + \sigma_{33}\gamma_3^2 + 2\sigma_{12}\gamma_1\gamma_2 + 2\sigma_{13}\gamma_1\gamma_3 + 2\sigma_{23}\gamma_2\gamma_3 \qquad (2.29)$$

par contre la contrainte tangentielle peut déduite

2-5: équations d'équilibre à la surface

soit un solide (S) soumis à des forces extérieures en équilibre. Soit un élément de surface (ds), de normale $\vec{\gamma_i}$, soumis à un vecteur contrainte extérieur $\vec{T}(\gamma_i)$
l'équilibre à la surface ds, fait que ce vecteur contrainte extérieur $\vec{T}(\gamma_i)$, doit être contraint par le vecteur contrainte intérieur $\vec{t}(\gamma_i)$ et l'on écrit à cet effet :
$\vec{T}(\gamma_i)$ ds + $\vec{t}(\gamma_i)$ ds = 0. Ce qui implique que :
$\vec{T}(\gamma_i) = -\vec{t}(\gamma_i)$
Ou ce qui peut être écrit en notation indicielle :
$T_i = t_i$

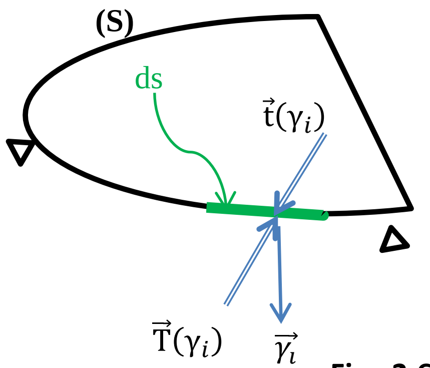


Fig : 2.6

Ou $$T_i = t_i = \boldsymbol{\sigma_{ij}\,\gamma_j} \qquad (2.30)$$

L'équation (2.30) peut être réécrite sous forme de notation d'ingénieur matricielle :

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \qquad (2.31)$$

2-6: Contraintes principales et directions principales correspondantes :

L'étude du tenseur contrainte, montre qu'en un point d'un milieu continu en équilibre, il existe un trièdre appelé « **trièdre principal** » sur ses trois faces duquel les vecteurs contraintes $\vec{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\gamma})$ vont se limiter à des contraintes normales, les contraintes tangentielles sont donc nulles.
Ces contraintes normales s'appellent des « **contraintes principales** ».
Les facettes du trièdre principale, sont appelées « **facettes principales**, « les normales de ces facettes sont appelées « **directions principales** »

Déterminons donc ces contraintes principales et leurs directions principales correspondantes.

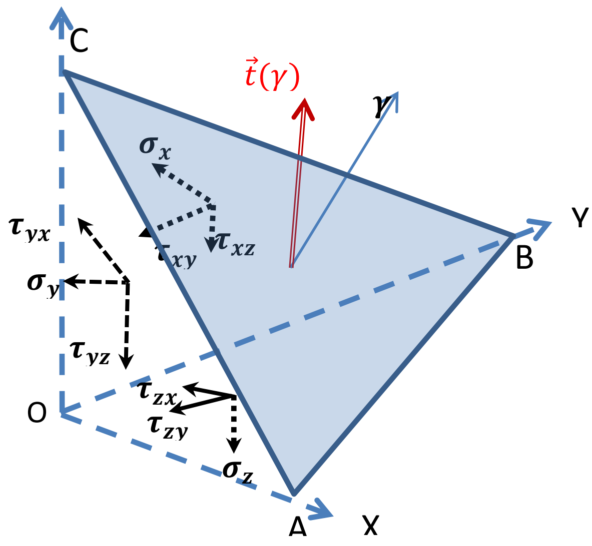


Fig : 2.7

Pour ce faire , nous devons au préalable exprimer analytiquement la propriété que ces contraintes principales sont normales aux facettes sur lesquelles elles agissent.

Si $\vec{\gamma_i}$ est le vecteur unitaire de la normale à facette principale et S la valeur de la contrainte principale agissant sur cette facette selon cette normale.

Nous pouvons écrire alors que le vecteur contrainte principale est : **S** $\boldsymbol{\gamma_i}$ ce même vecteur a été défini au préalable comme étant égale à : $\boldsymbol{\sigma_{ij}\ \gamma_j}$.

Donc nous pouvons formuler que : $\sigma_{ij}\ \gamma_j = S\ \gamma_i$ ou $\sigma_{ij}\ \gamma_j - S\ \gamma_i = 0$

Pour mettre en facteur commun, nous devons écrire que : $\gamma_i = \delta_{ij}\, \gamma_j$

Alors : $\sigma_{ij}\ \gamma_j - S\ \delta_{ij}\, \gamma_j = 0$ ou $(\sigma_{ij} - S\, \delta_{ij})\gamma_j = 0$ (2.32)

Cette équation est sous la forme : A*B=0 ce qui implique que : soit A=0 ou B=0.

l'équation (2.32) correspond à deux éventualités :

la première soit $(\sigma_{ij} - S\, \delta_{ij}) = 0$

la deuxième soit $\gamma_j = 0$, cette deuxième éventualités ne peut avoir lieu vue le principe de la normalité : $\gamma_j \gamma_j = 1$ donc $\gamma_j \neq 0$.

Il ne reste que la deuxième éventualité : $\boldsymbol{\sigma_{ij} - S\, \delta_{ij} = 0}$ (2.33)

L'équation (2.33) peut être écrite sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - S & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{pmatrix} = 0 \quad (2.34)$$

Le système d'équation (2.30) n'admet une solution que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0 = (-1)^2\, (\sigma_x - S) \begin{vmatrix} \sigma_y - S & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} + (-1)^3\, \tau_{xy} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^4 \tau_{xz} \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - S \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{vmatrix} = 0$$

Après développement :

$$-S^3 + S^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - S(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{xz}{}^2 - \tau_{yz}{}^2) + (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}{}^2 - \sigma_y\tau_{xz}{}^2 - \sigma_z\tau_{xy}{}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}) = 0$$

En notation indicielle:

$$-S^3 + S^2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - S(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}{}^2 - \sigma_{13}{}^2 - \sigma_{23}{}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}{}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}{}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}{}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}) = 0$$

Ou:

$$-S^3 + I_1 S^2 - I_2\, S + I_3 = 0 \quad (2.35)$$

$I_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sigma_{ii}$ c'est **la trace** du tenseur σ_{ij}.

$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\, \sigma_{ji})$

$I_3 = |\sigma_{ij}|$

La formulation de l'équation caractéristique (2.35) a été déduite de celle (2.33), sans faire référence aux systèmes d'axes choisies, par conséquent, les coefficients de cette équation sont invariables quel que soit le système d'axes choisi, elles sont appelées à cet effet : « **les invariants** » .

L'équation (2.35) est du troisième (3) degré de la variable inconnue S.

Si le tenseur σ_{ij} est symétrique et de composantes réelles, l'algèbre nous apprend qu'il admet trois valeurs propres et trois vecteurs propres correspondant.
L'équation (2.35) admet donc trois (03) solutions réelles.

Soit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les trois solutions réelles de l'équation caractéristique (2.35).

Convenons nous de les classer : $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_3$ (2.36)

Une fois, les trois solutions de l'équation caractéristique sont connues, on détermine les directions principales correspondantes :

Pour déterminer la première direction principale $X_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ qui est la normale de la première facette principale, on remplace dans l'équation $(\sigma ij - S\,\delta_{ij})\gamma_j = 0$ S par σ_1 et γ_j par X_1 :

Ce qui donne le système d'équation : $(\sigma ij - \sigma_1\,\delta_{ij})X_1 = 0$ (2.37)

Ou : $\begin{pmatrix} \sigma_x - \boldsymbol{\sigma_1} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \boldsymbol{\sigma_1} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \boldsymbol{\sigma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0$ (2.38)

Le système de trois équations (2.38) qui est linéaire et homogène en les trois inconnues l_1, m_1, n_1 peut être résolu par une méthode d'analyse numérique ou par élimination.
Normalement c'est un système entièrement déterminé (autant d'équations que d'inconnues).
Si, on se trouve parfois dans le cas d'un système sous déterminé moins d'équations que d'inconnues), on rajoute la loi de la normalité pour enlever cette indétermination : $\gamma_j \gamma_j = 1$.

La deuxième direction principale $X_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$ est obtenue de la même façon, c'est-à-dire en replaçant dans l'équation $(\sigma ij - S\,\delta_{ij})\gamma_j = 0$ S par σ_2 et γ_j par X_2 :
La troisième direction principale est obtenue par la loi de permutation directe du produit vectorielle du système principale $X_3 = X_1 \wedge X_2$ (2.39)
Donc dans le trièdre principal ou le système principal le tenseur contrainte σij s'écrit alors :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

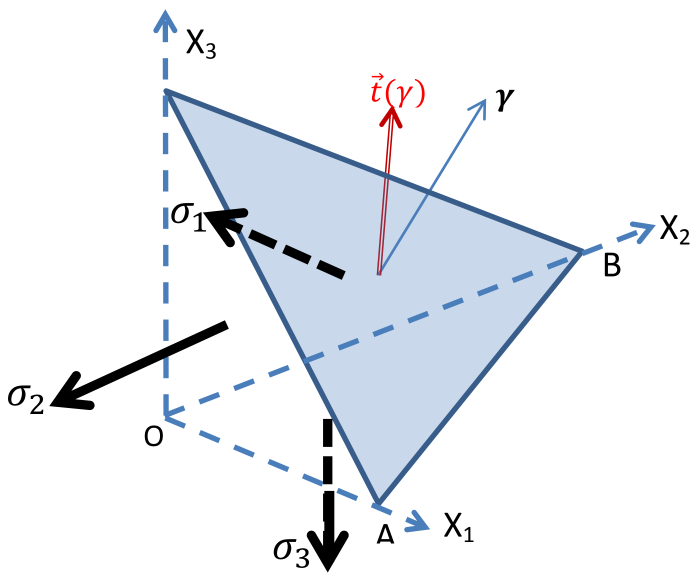


Fig : 2.8

2-7: Déviateurs de contraintes :

Si on définit en un point M la valeur $\sigma_m = \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{I_1}{3}$ comme étant la contrainte normale moyenne.

En soustrayant du tenseur contrainte le produit de cette contrainte moyenne σ_m par le tenseur unitaire ou le delta de Kronecker δ_{ij} :

$$\sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} - \sigma_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma'_{ij}}$$

$$\boldsymbol{\sigma'_{ij}} = \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$$ est le **déviateur de contrainte**

Propriétés du déviateur de contrainte :

$$I'_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = -\sigma_m + \sigma_y - \sigma_m + \sigma_z - \sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 3\sigma_m$$

$$I'_1 = I_1 - 3\frac{I_1}{3} = I_1 - I_1 = 0$$

Donc le déviateur des contraintes a pour trace nulle.

Si S sont les contraintes principales du tenseur contrainte σ_{ij} et X_i sont les directions principales correspondantes.

Quelles sont alors les contraintes principales S' et leurs directions principales correspondantes X'_i du tenseur déviatoriques.

Partant de :

$$(\sigma ij - S\,\delta_{ij})X_j = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} = \sigma'_{ij} \gg\gg \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}$$

$$(\sigma'_{ij} + \sigma_m\delta_{ij} - S\,\delta_{ij})X_j = 0 \gg [\sigma'_{ij} - (S - \sigma_m)\,\delta_{ij}]X_j = 0 \gg [\sigma'_{ij} - S'\,\delta_{ij}]X_j = 0$$

$$[\sigma'_{ij} - S'\,\delta_{ij}]X_j = 0 \qquad (2.36)$$

Ou S' = $(S - \sigma_m)$ donc les contraintes principales du déviateurs de contraintes sont :

$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m$, $\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m$, $\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$.

Par contre le déviateur des contraintes a les mêmes directions principales que le tenseur σ_{ij} .

$X'_i = X_i$

2-8: Représentation plane de l'état de contrainte par le tricercle de Mohr :

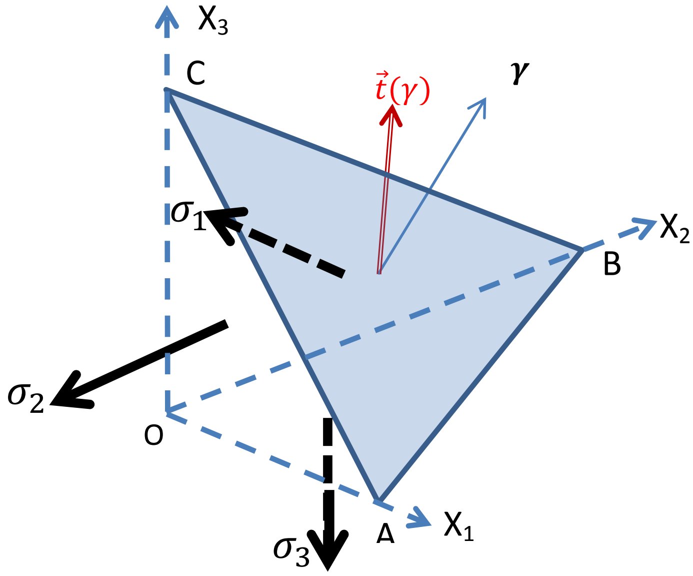
En se plaçant dans le système principal formé par les axes principaux des directions principales.

Soit $\vec{\gamma_i}$ le vecteur unitaire de la facette défini par ses cosinus directeurs relativement au système principal :

$$\vec{\gamma_i} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma, OX_1) \\ \cos(\gamma, OX_2) \\ \cos(\gamma, OX_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$ où OX_1, OX_2 , OX_3 sont les trois directions principales.

Nous pouvons reprendre l'écriture du vecteur contrainte $\vec{t}(\gamma_i)$, (2.30) mais formulée dans le système principale :

$\mathrm{t}_i = \boldsymbol{\sigma_{ij}\,\gamma_j}$ ou :



$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Dans le système principale :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

La composante $\sigma = \mathrm{S}_{ij}\,\gamma_i\gamma_j$ ou :

$$\sigma = (l \quad m \quad n) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

donc :

$$\boldsymbol{\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \sigma} \qquad (2.37)$$

la composante tangentielle :

$$\tau = \sqrt{t_i^2 - \sigma^2} = \sqrt{(\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 \mathrm{l}^2 + \sigma_2 \mathrm{m}^2 + \sigma_3 \mathrm{n}^2)^2} \qquad (2.38)$$

En plus de la loi de la normalité : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ (2.39)

les trois équations (2.37), (2.38), (2.39) sont nécessaires et suffisantes pour déterminer les trois inconnues (l, m , n).
nous rappelons que (l, m , n) sont les cosinus directeurs de la normale à la facette sur laquelle agit le vecteur $\vec{\mathrm{t}}(\gamma_i)$, que représente alors les lieux géométriques formés par les trois solutions **l, m, n** ?
il est facile de résoudre les trois équations en les inconnues l, m , n, en fonction des valeurs de contraintes principales $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ et les variables σ et τ :

$$\mathbf{l^2} = \frac{(\boldsymbol{\sigma - \sigma_2})(\boldsymbol{\sigma - \sigma_3}) + \boldsymbol{\tau}^2}{(\boldsymbol{\sigma_1 - \sigma_2})(\boldsymbol{\sigma_1 - \sigma_3})} \qquad (2.40)$$

$$\mathbf{m^2} = \frac{(\boldsymbol{\sigma - \sigma_1})(\boldsymbol{\sigma - \sigma_3}) + \boldsymbol{\tau}^2}{(\boldsymbol{\sigma_2 - \sigma_1})(\boldsymbol{\sigma_2 - \sigma_3})} \qquad (2.41)$$

$$\mathbf{n^2} = \frac{(\boldsymbol{\sigma - \sigma_1})(\boldsymbol{\sigma - \sigma_2}) + \boldsymbol{\tau}^2}{(\boldsymbol{\sigma_3 - \sigma_2})(\boldsymbol{\sigma_3 - \sigma_1})} \qquad (2.42)$$