Programme :

Théorie de la Mécanique des Milieux Continus

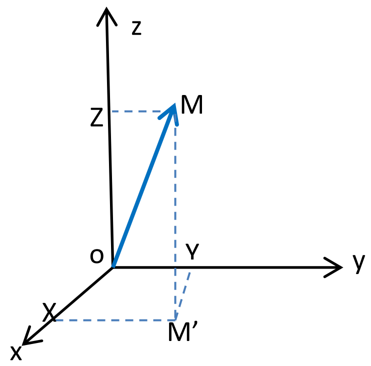
Table des matières

<u>Références</u> : inspiré du cours du professeur Charles Massonnet, Université de Liège

1-1: Transformation de cordonnées et notation indicielle.

soit un point M = f(x. y z) rapporté dans un système cartésien trirectangle directe de référence (Oxyz), de base unitaire ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

M= $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ *notation d'ingénieur*, $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$= X_i notation indicielle.



de telle façon que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ soit égale à la ligne brisée oXM'M.
où M'est la projection du point M sur le plan oxy.
C'est-à-dire, on peut écrire : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XM'} + \overrightarrow{M'M}$.

Soit un nouveau système (ox'y'z') déduit du premier (Oxyz) par une transformation quelconque mais de même origine O et de base unitaire ($\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$).
$|\vec{\imath}'| = |\vec{\jmath}'| = |\vec{k}'| = 1$
Pour obtenir la coordonnée X' du point M dans ce nouveau système, on doit projeter le segment dirigé $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe OX', cela revient à projeter la ligne brisée OXM'M sur l'axe OX'.

Cela revient également à faire le produit scalaire de la ligne brisée et l'axe OX' :
Sachant que le produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = |\vec{V_1}| * |\vec{V_2}| * \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2})$
$|\vec{V_1}|$ *et* $|\vec{V_2}|$, étant respectivement le module ou la norme des vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{XM'}.\overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{M'M}.\overrightarrow{OX'} = |\overrightarrow{OX}| * |\vec{\imath}'| * \cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) + |\overrightarrow{XM'}| * |\vec{\imath}'| * \cos(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox'}) + |\overrightarrow{M'M}| * |\vec{\imath}'| * \cos(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ox'})$.

Donc, X' = X $\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'}) + Y\cos(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox'}) + Z\cos(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ox'})$.

Si on désigne $\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox'})$ *par* $cos(x, x')$.

Donc X' = X $cos(x,x')$+ Y $cos(y,x') + Zcos(z,x')$.

Par analogie on trouve Y' = X$cos(x,y')$+ Y $cos(y,y') + Zcos(z,y')$.

Et Z' = X $cos(x,z')$+ Y $cos(y,z') + Zcos(z,z')$.

Ce qui revient à écrire cette relation sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(x,x') & cos(y,x') & cos(z,x') \\ cos(x,y') & cos(y,y') & cos(z,y') \\ cos(x,z') & cos(y,z') & cos(z,z') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

La relation inverse, c'est-à-dire, obtenir les coordonnées X_i à partir des coordonnées X_j' :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(x',x) & cos(y',x) & cos(z',x) \\ cos(x',y) & cos(y',y) & cos(z',y) \\ cos(x',z) & cos(y',z) & cos(z',z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Si on fait de plus la convention : $C_{ij} = \cos(Ox_i, Ox'_j)$, et on passe à la convention de notation indicielle , on remplaçant (x,y,z) et (x',y',z') respectivement par (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3).
On remarquant également que par exemple $cos(x', x) = \ cos(x, x')$.
Mais attention, ne confondez pas par exemple C_{21} qui est différent de C_{12}, $(\cos(y,x') \neq \cos(x,y'))$.
Avec ces annotations ci-dessus énumérées, les relations (1.1) et (1.2) peuvent être reformulées de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$X'_j = C_{1j}X_1 + C_{2j}X_2 + C_{3j}X_3 \qquad j=1,2,3 \tag{1.5}$$

$$X_i = C_{i1}X_1 + C_{i2}X_2 + C_{i3}X_3 \qquad i=1,2,3 \tag{1.6}$$

Chacune des formulations (1.5) et (1.6) remplace trois équations respectivement pour j=1,2,3 et pour i=1,2,3.

En utilisant le signe sommatoire, les expressions (1.3) et (1.4) peuvent être encore écrite comme suit :

$$X'_j = \sum_{i=1}^{i=3} c_{ij} X_i \tag{1.7}$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{j=3} c_{ij} X'_j \tag{1.8}$$

Par-delà, on peut en déduire qu'on peut omettre (délaisser) le signe sommatoire $\sum$, si l'on adopte la **convention de sommation d'Einstein :**

Chaque fois qu'un indice en lettre minuscule apparait deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme de trois termes qui sont obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1, 2 ,3.

Grace à cette convention, les relations (1.7) et (1.8) peuvent être écrite tout simplement de la façon suivante :

$$X'_j = c_{ij} X_i \tag{1.9}$$

$$X_i = c_{ij} X'_j \tag{1.10}$$

Comme on le voit dans la relation (1.5), l'indice répété dans (1.9) disparait après avoir effectué la sommation, cette indice en lettre minuscule s'appelle : « **Indice muet** ».

Propriété de l'indice muet :

- Chaque lettre en lettre minuscule, peut être utilisée pour remplacer un indice muet, pourvu qu'il diffère des autres indices dans le monôme.
- Chaque fois qu'un indice en lettre minuscule apparait deux fois dans le même monôme, ce monôme représente la somme de trois termes qui sont obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs 1 puis 2 puis3.
- Un indice muet ne peut apparaitre plus de deux fois dans le même monôme, c'est péché dans la convention d'Einstein.

La relation (1.10) peut s'écrire davantage : $\mathrm{X_i} = \mathrm{c_{ik}X'_k}$ (1.11)

En substituant la valeur de Xi de (1.11) dans (1.9) on obtient :

$\mathrm{X'_j} = \mathrm{c_{ij}X_i} = \mathrm{c_{ij}c_{ik}X'_k}$ implique que : $\mathrm{X'_j} = \mathrm{c_{ij}c_{ik}X'_k}$ (1.12)

La présence dans le monôme de l'expression (1.12) de deux indices muets indique clairement la double sommation à effectuer.

Comme $\mathrm{X'_1}$, $\mathrm{X'_2}$, $\mathrm{X'_3}$ sont des variables indépendantes, l'expression (1.12) doit se réduire à l'avantage de l'identité : $\mathrm{X'_j} \equiv \mathrm{X'_j}$, $\forall$ les coefficient $\mathbf{c_{ij}c_{ik}}$.

Donc $\mathrm{c_{ij}c_{ik}} = 1 \; pour\ tout\ j = k$

$\mathrm{c_{ij}c_{ik}} = 0 \; pour\ tout\ j \neq k$

D'où $\mathrm{c_{ij}c_{ik}} = \delta_{jk} = \begin{Bmatrix} 1 \;\; si\ j = k \\ 0 \; si\ j \neq k \end{Bmatrix}$ (1.13)

δ_{jk} *est le Delta de Kronecker.*

1-2: SCALAIRES VECTEURS TENSEURS.

1-2-1:SCALAIRE :

C'est une quantité physique qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées, comme :

La distance entre deux points, l'énergie cinétique d'une particule se déplaçant à une vitesse V

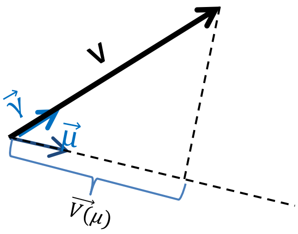
$(= \frac{1}{2}\mathrm{m\,v^2})$.

1-2-2:VECTEUR :

Par contre, les quantités qui nécessitent dans leurs définitions une représentation par un segment dirigé, comme une force, un déplacement sont appelées **VECTEURS.**

Généralement, un vecteur $\underset{V}{\rightarrow}$ est défini par sa grandeur V ou son module et sa direction γ (vecteur unitaire).

Donc, $\overrightarrow{V(\gamma)} = V\,\vec{\gamma}$



soit $\vec{\mu}$, une autre direction $\neq \vec{\gamma}$. Donc, $\overrightarrow{V(\mu)} = V\cos(\vec{\gamma},\vec{\mu})$ (2.1)

soit un système cartésien trirectangle directe de référence ($Ox_1\ x_2\ x_3$)
de base unitaire ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et V_1, V2, V3 les trois composantes du vecteur $\vec{V}$
respectivement selon les trois axes ($\overline{Ox_1}, \overline{Ox_2}, \overline{Ox_3}$) de vecteurs unitaires ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).

On peut écrire alors : $\vec{V} = V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k} = V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3 = V_i\,x_i$ (2.2)

Le vecteur s'écrit alors : $\overrightarrow{V(\mu)} = V_1\cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_1}) + V_2\cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_2}) + V_3\cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_3})$ (2.3)

D'où la définition d'un vecteur qui s'annonce comme suit :

Un vecteur associe à chaque direction de l'espace un scalaire, au moyen d'une expression qui est linéaire et homogène en les cosinus directeurs.

1-2-3:TENSEUR :

En usant de la définition d'un vecteur, qu'on peut la généraliser à celle d'un tenseur, en disant que :

Si le vecteur associe à chaque direction de l'espace un **scalaire**, **un tenseur associe par contre un vecteur à chaque direction de l'espace au moyen d'une expression linéaire et homogène en les cosinus directeurs.**

Dans un système cartésien trirectangle directe de référence ($OX_1\ X_2\ X_3$) de base unitaire ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) , un tenseur $\tilde{T}$ est défini par ces trois valeurs (composantes) T_1, T2, T3 qui sont plutôt des vecteurs.
Donc, T_1, T2, T3 sont appelées les valeurs du tenseur sur les trois axes coordonnées.
On peut écrire alors : $\tilde{T} = T_1\vec{\imath} + T_2\vec{\jmath} + T_3\vec{k}$ (2.4)
Où cette fois-ci T_1, T2, T3 sont des vecteurs.

Le tenseur $\tilde{T}$ associé à une autre direction $\vec{\mu}$ s'écrit alors :

$\tilde{T}\,(\vec{\mu}) = T_1\cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_1}) + T_2\cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_2}) + \cos(\vec{\mu},\overrightarrow{x_3}) = T_i\,\mu_i$ (2.5)

La composante T_1 qui est un vecteur, est définie par ses composantes : T_{11} , T_{12} , T_{13} , qui sont des scalaires.
De même, les composantes des vecteurs T_2 , T_3 sont respectivement: T_{21} , T_{22} , T_{23} et T_{31} , T_{32} , T_{33} .
Donc les neuf composantes T_{ij} s'appellent les composantes du tenseur $\tilde{T}$ relativement aux axes coordonnées.
On s'inspirant de la transformation d'un vecteur d'une base à une autre, on peut en déduire celle d'un tenseur :

$$T'_{ij} = c_{ki}c_{lj}T_{kl} \qquad (2.5)$$

La relation inverse s'écrit alors

$$T_{ij} = c_{ik}c_{jl}\,T'_{kl} \qquad (2.6)$$

On appelle ordre d'un tenseur, le nombre d'indice n, l'exemple ci-dessus est relative à un tenseur d'ordre 2 (n=2).
La relation entre l'ordre d'un tenseur et le nombre de ses composantes est (3^n)
Donc un tenseur d'ordre 2 a 3^2 =9 composantes qui s'écrivent :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Tenseur symétrique : $T_{ij} = T_{ji}$
Tenseur antimétrique : $T_{ij} = -T_{ji}$ implique que les composantes de la diagonale sont toutes nulles ($T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$)
Donc de ce qui précède il s'ensuit que :

- Un scalaire est un tenseur d'ordre 0 $\rightarrow$ a $3^0 = 1$ composante.
- Un vecteur est un tenseur d'ordre 1 $\rightarrow$ a $3^1 = 3$ composantes.
- Un tenseur d'ordre 2 $\rightarrow$ a $3^2 = 9$ composantes.
- Un tenseur d'ordre n $\rightarrow$ a 3^n composantes qui se transforme selon la formule :

$$T'_{pqr.....} = C_{ip}C_{jq}C_{kr} \dots \dots T_{ijk...} \tag{2.7}$$

1-3: OPÉRATIONS TENSORIELLES.

- Multiplication par un scalaire : $T_{ij} = \lambda\, S_{ij}$ T_{ij} et S_{ij} sont du même ordre (2.8)
- Addition de tenseurs du même ordre : $T_{ij} = S_{ij} + R_{ij}$ (2.9)
- Multiplication de deux tenseurs : $T_{ij} = U_i * V_j$ (2.10)
  le produit de deux tenseurs d'ordre respectivement m et n est un tenseur d'ordre m+n.
- Trace d'un tenseur : on appelle trace d'un tenseur la somme des composantes situées sur la diagonale : $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ (2.11)

1-4: CHAMPS DE TENSEURS.

dans un système cartésien directe, xi $\rightarrow$ (x_1, x_2, x_3) $T_{ij}(x_1, x_2, x_3) = T_{ij}(x_i)$.

$$\left.\begin{array}{l} \partial \dots../\partial x_p \rightarrow \partial_p \\ \\ \partial^2 \dots../\partial x_p \partial x_q \rightarrow \partial_{pq} \end{array}\right\} \text{Opérateur différentiel}$$

$$\partial_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}$$ Opérateur **laplacien** noté : ∇^2 ou Δ