CHAPITRE 3

Eléments d'optimisation combinatoire

PLAN

1. Introduction
2. Définitions
3. Exemples de problèmes
4. Méthodes de résolution
5. Taxonomie des méthodes

1. Introduction

Optimiser = maximiser un profit ou minimiser un coût = trouver le maximum ou le minimum

Optimiser un système = trouver sa meilleure configuration tout en exploitant les ressources disponibles. (en respectant les contraintes).

Exemples :

- Problème de découpe maximale: minimiser les déchets ;
- Problème de transport : trouver le chemin minimal ;
- Bin packing : maximiser le profit ;
- Ordonnancement de tâches : minimiser la durée totale ;
- Gestion de projet : minimiser le retard ;
- Emploi du temps : minimiser le nombre de salles , d'enseignants , la date de fin ;

RO recherche opérationnelle -Définition

Discipline des méthodes scientifiques pour aider à mieux décider

Définition

- Objectif de la « RO » : faire de la recherche scientifique « opérationnelle » – utilisable sur « le terrain des opérations » – à l'aide des outils de l'informatique.

- Mettre au point des méthodes,

  les implémenter au sein d'outils (logiciels)

  pour trouver des résultats ensuite confrontés à la réalité (et repris jusqu'à satisfaction du demandeur).

II. Définitions

Un problème d'Optimisation consiste à rechercher la valeur d'une variable x dans un ensemble S pour la laquelle la fonction f: S→R soit optimale (minimale ou maximale) tout en respectant certaines clauses et s'écrit (formulation mathématique) : $|S| \rightarrow$ INFINI

$$PO = \begin{cases} Opt_{x \in S} f(x) \\ Ax = B \\ Ax \leq B \end{cases}$$

A est une matrice et B un vecteur

2. Définitions

- x est la variable du PO (il peut être entière, float, un vecteur, une matrice , string, ...):
- Opt. = optimiser = minimiser ou maximiser = opérateur = trouver le max ou le min.
- f s'appelle l'objectif ou le critère ou encore la fonction économique à optimiser ;
- S est dit espace de recherche ou espace d'états ou de configurations.
- $Ax = B$, $Ax \leq B$ sont dites les contraintes du PO.

II. Définitions

- Optimiser $f: S \rightarrow R \Rightarrow$

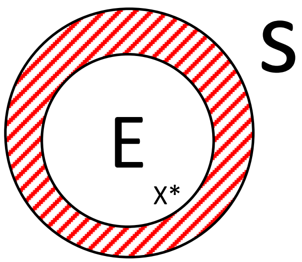
  rechercher x^* dans S / x^* =ArgMIN $f(x)$

$f(x^*) \leq f(x)$ quelque soit x de S

- x^* peut être unique ou non et peut ne pas exister.
- Si x^* existe, elle est dite solution optimale du PO ou l'optimiseur (minimiseur ou maximiseur) de f.
- $f(x^*)$ est dit alors l'optimum (le maximum ou le minimum) de f.

II. Définitions

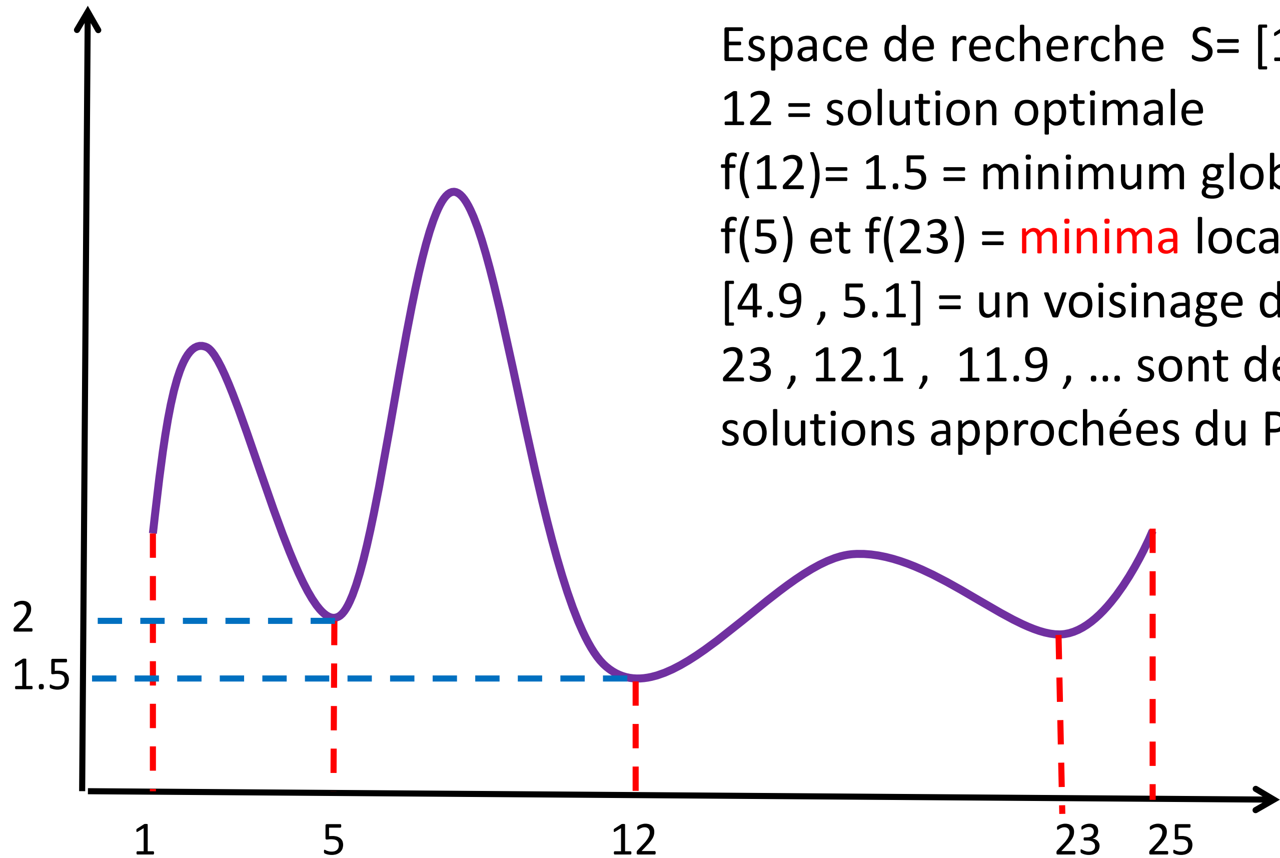
- Tout x de S est dit solution candidate du PO.
- Si x satisfait les contraintes, x est dit une solution admissible ou réalisable du PO ($x \in E$) .
- Si $f(x0) \approx f(x^*)$ c.-à-d. $|f(x0)-f(x^*)| < \varepsilon$ (donné) alors x0 est une solution approchée du PO.
  (le contraire: solution exacte c.-à-d. optimale)



II. Définitions

- Le voisinage d'une solution $x0$ noté V_{x0} est l'ensemble de solutions x telles que $f(x0) \approx f(x0)$ c.-à-d. $|f(x0)-f(x)| < \varepsilon$
- Le PO possède un optimum <u>local</u> en $x0$ si et seulement si $\forall x \in V_{x0} : f(x0) \leq f(x)$.
- Le PO possède un optimum <u>global</u> en x^* si et seulement si $\forall x \in S : f(x^*) \leq f(x)$.

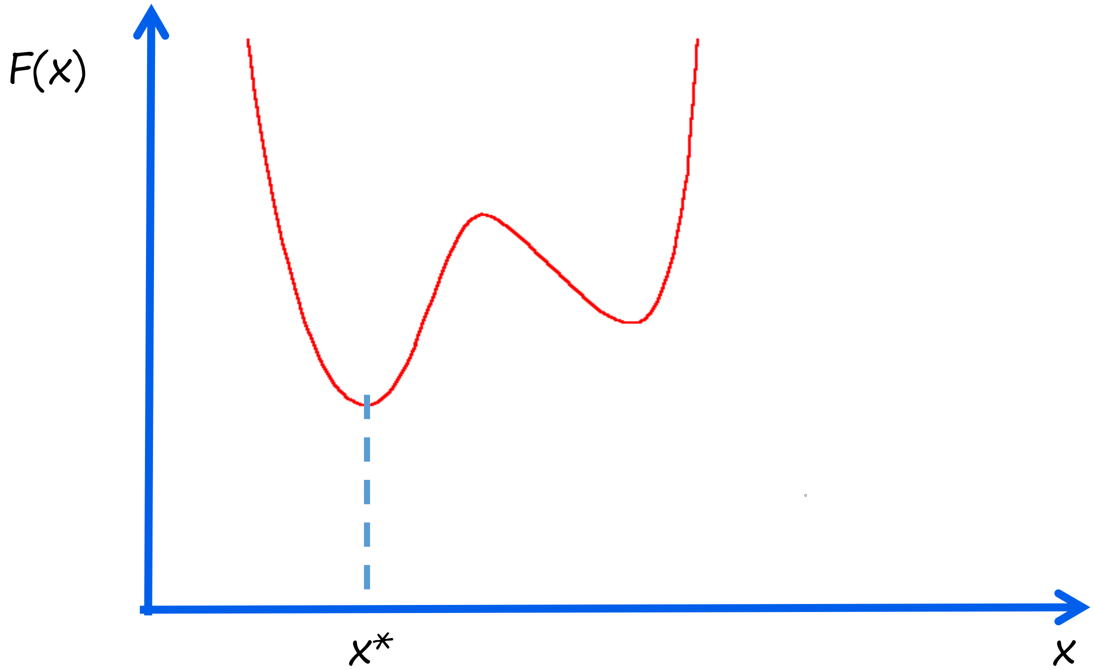
Exemple 1 : min f(x)



Espace de recherche S= [1,25]
12 = solution optimale
f(12)= 1.5 = minimum global
f(5) et f(23) = minima locaux
[4.9 , 5.1] = un voisinage de 5.
23 , 12.1 , 11.9 , … sont des solutions approchées du PO

De quoi parle-t-on ?

Pour une fonction à une seule variable :

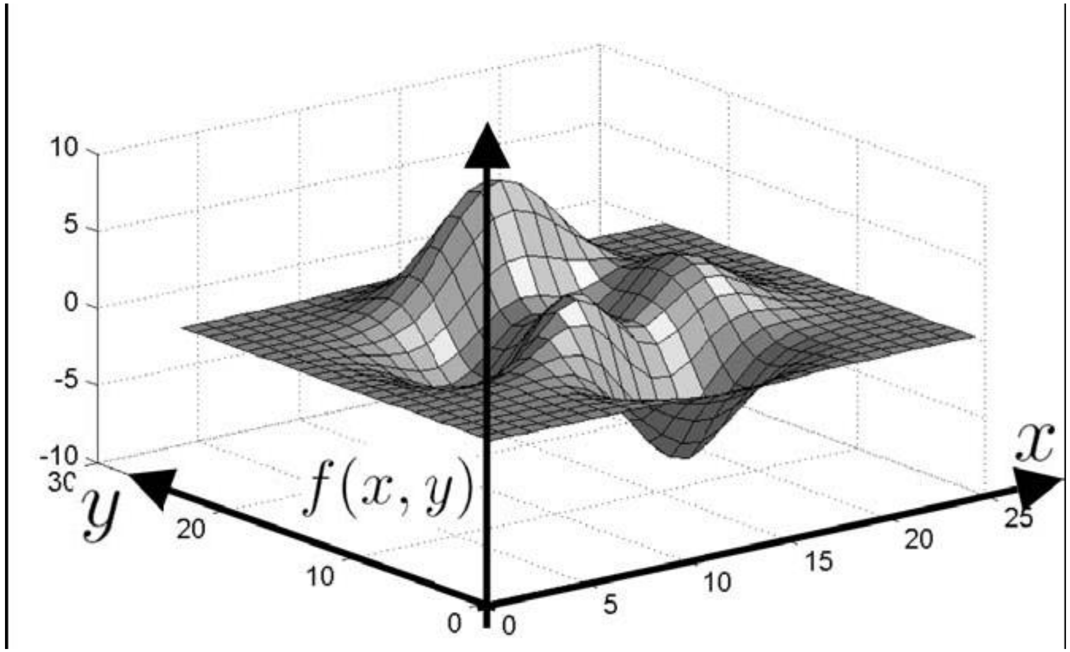


Continuité → dérivabilité → accroissements finis → x^*

Mais que se passe-t-il pour $f(x) = \sin x + e^x - \ln x + x^3$

De quoi parle-t-on ?

Et avec une fonction à deux variables :



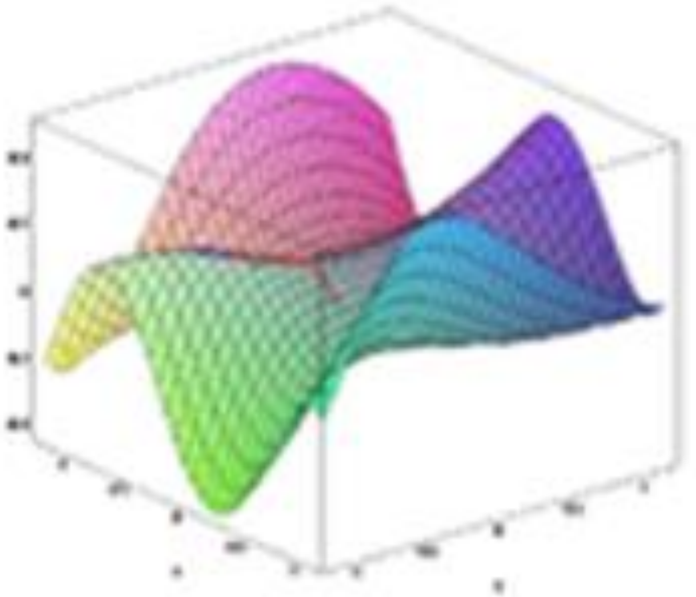
Différentiable → gradient → X* = (x,y)

Attention ça ne marcherait pas toujours, … fonctions non lisses, …

I. De quoi parle-t-on ?

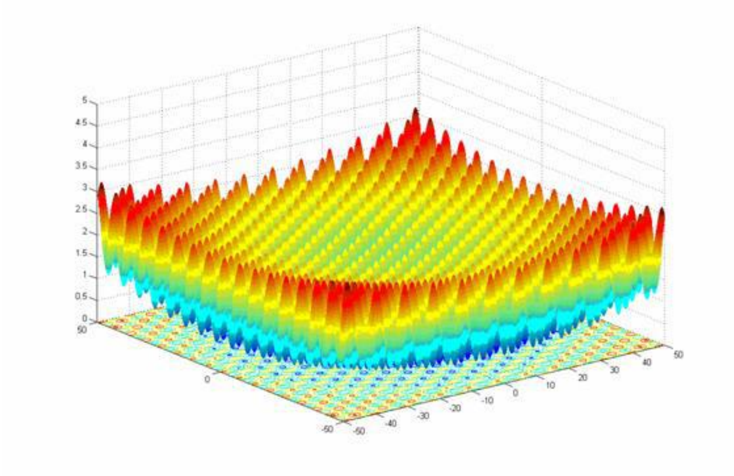
Et si on fonce plus loin …

$$f(x,y) = sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3\right)\cos(2x + 1e^x)$$

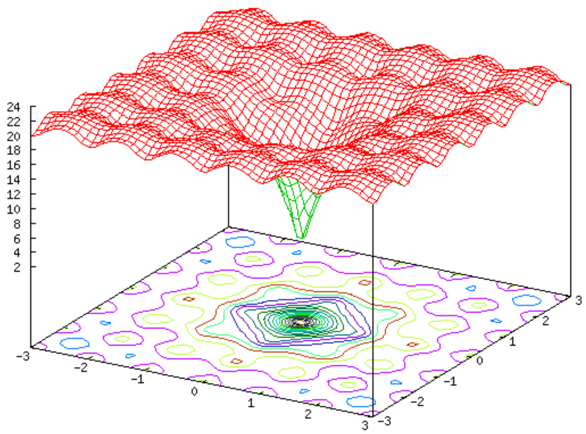


I. De quoi parle-t-on ?

Fonction de Griewank



Fonction de Ackley
TEST FUNCTION FOR OPTIMIZATION



Exemple 2

Une entreprise fabrique deux types de produits A et B.

La réalisation d'une unité de A demande 30 DA de matière première et 120 DA de main d'œuvre.

La réalisation d'une unité de B demande 60 DA de matière première et 80 DA de main d'œuvre.

Les profits réalisés sont de 50 DA par unité de A, et de 40 DA par unité de B.

Les contraintes économiques font que :

- La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 580 DA.
- La dépense journalière en main d'œuvre ne doit pas dépasser 1250 DA.

On désire trouver le plan de production journalière (c.-à-d. les nombres d'unités de A et B à fabriquer par jour) qui maximise le profit journalier de l'entreprise.

1. Donner une formulation mathématique à ce problème.
2. Quel est le type de ce PO ?
3. Expliciter l'espace de recherche ; la fonction objectif ; les contraintes ;

Types de problèmes d'optimisation

$$PO = \begin{cases} Opt_{x \in S} f(x) \\ Ax = B \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Si x est continu (S est continu), le PO est dit continu ;

Si x est discret (S est discret), le PO est dit discret ;

Si x est une fonction de temps, le PO est dit dynamique ;

Si x dépend d'une probabilité (aléatoire), le PO est dit stochastique ;

Si f est un vecteur, c.-à-d. $f : S \to R^n$, le PO est di multiobjectif ou multicritère ;

- Soit x1 le nombre d'unités du produit A à fabriquer;
- Soit x2---B --------------;

La formulation mathématique de ce problème d'optimisation s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) = 50x1 + 40x2 \\ 30x1 + 60x2 \leq 580 \\ 120x1 + 80x2 \leq 1250\,, x1 \in N\,, x2 \in N \end{cases}$$

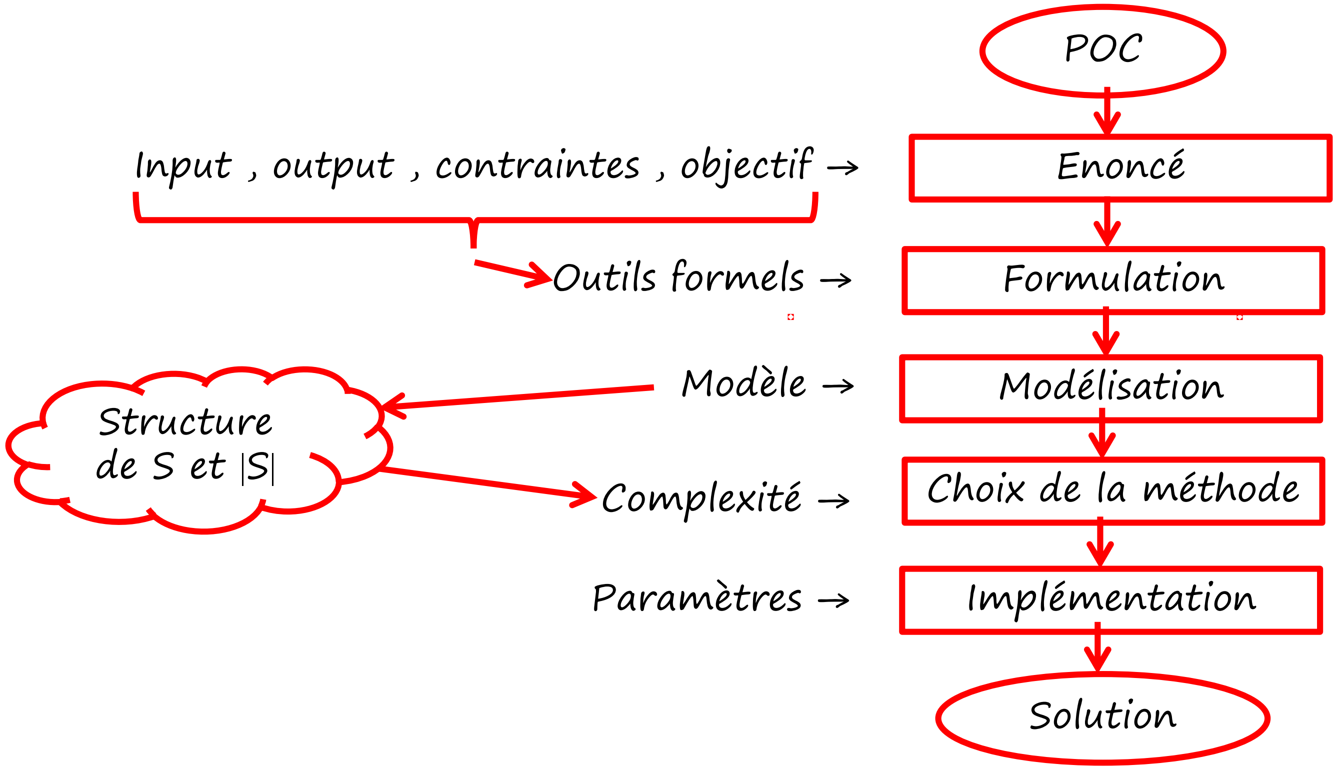
La variable x = $(x_1, x_2) \in N$

L'objectif = $f(x_1, x_2) = 50x1 + 40x2$

L'espace de recherche est N^2

II. ELEMENTS D'OC

Processus de résolution d'un POC



Le problème SAT

"satisfiabilité" d'une expression logique

Exemple

$(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee t) \wedge (y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee z \vee \bar{t})$

x est vrai ou faux **x vrai** $\Leftrightarrow$ **$\bar{x}$ faux**

Peut-on affecter des valeurs vrai ou faux aux variables de telle façon que l'expression soit vraie ?

Exemple

une solution: x=vrai y=faux t=vrai z=vrai

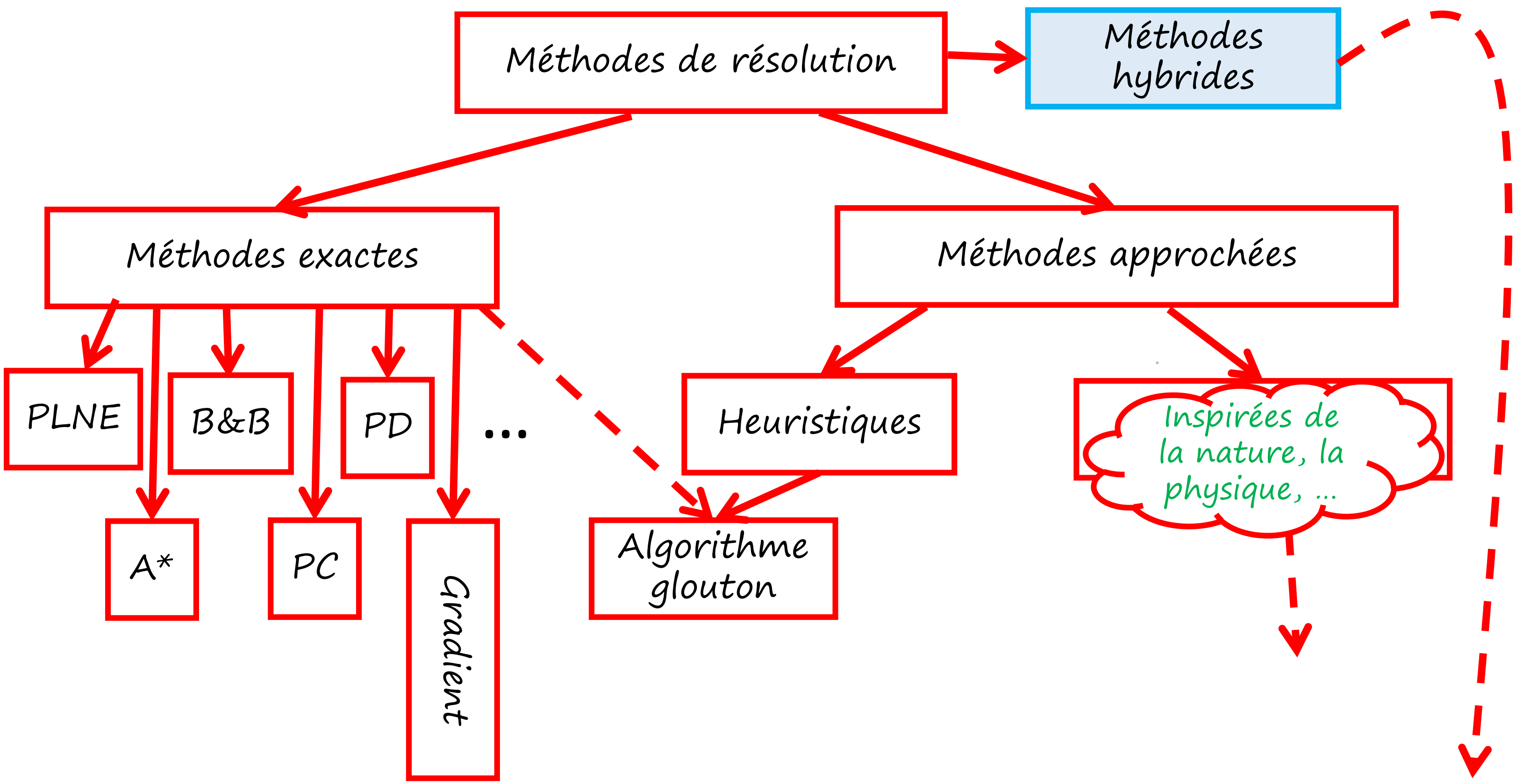
Le théorème de Cook

Stephen Cook
a classé le
problème SAT
comme *NP*-complet

SAT est le premier problème
***NP*-complet connu**

II. ELEMENTS D'OC

Récap. Taxonomie des méthodes de résolution



II. ELEMENTS D'OC

Chronologie:

- ✓ Fin des années 1940 : concurrence vers l'exact ;

  Simplexe, G. Dantzig (1947) ; PD, R. Bellman (1956).

- ✓ Début des années 1980 : avènement des métaheuristiques ;

  RT, Glover (1989) ; AG, J. Holland (1975). D.E. Goldberg en 1989.

  PSO , Russel Eberhart (1995) ; RT , Glover (1986), ...

- ✓ Années 1990 : l'ère de l'hybridation et méthodes émergentes;

  Martin et Otto, descente dans le RS (1990) ;

  Stûtzle et Hoos , RL dans les CF , (2000) ;

  Talbi , RT dans un AG (1998).