Suite chapitre 2

Exemples :

Exemple1 : On considère le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Calculer la matrice de transition par la méthode de Cayley -Hamilton

Valeurs propres de A : det $(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow$

Valeurs propres de A : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 4$

Détermination des fonctions $\alpha_i(t)$

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{3t} = \alpha_0(t) + 3\alpha_1(t) \\ e^{4t} = \alpha_0(t) + 4\alpha_1(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0(t) = 4e^{3t} - 3e^{4t} \\ \alpha_1(t) = -e^{3t} + e^{4t} \end{cases}$$

La matrice de transition est :

$$e^{At} = \alpha_0(t) I_2 + \alpha_1(t) A \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \alpha_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} - e^{4t} & -2e^{3t} + 2e^{4t} \\ e^{3t} - e^{4t} & -e^{3t} + 2e^{4t} \end{bmatrix}}$$

Exemple 2 : On considère le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Calculer la matrice de transition par la méthode de Cayley -Hamilton

Valeurs propres de A : det $(\lambda I - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1$ valeur propre double.

- Détermination des fonctions $\alpha_i(t)$

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ \dfrac{de^{\lambda_1 t}}{d\lambda_1} = \dfrac{d}{d\lambda_1}(\alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) \\ te^{\lambda_1 t} = \alpha_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t) \\ te^{-t} = \alpha_1(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = (1+t)e^{-t} \\ \alpha_1(t) = te^{-t} \end{cases}$$

- Matrice de transition

$$e^{At} = \alpha_0(t) I_2 + \alpha_1(t) A \Rightarrow e^{At} = \alpha_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

Exemple 3 : On considère le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Calculer la matrice de transition par la méthode de diagonalisation

Calcul des valeurs propres : $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \; et \; \lambda_2 = -4$$

Vecteurs propres : $AV_i = \lambda_i V_i$

Pour $\lambda_i = -2$ on a : $AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -2v_{11} = -2v_{11} \\ 2v_{11} - 4v_{21} = -2v_{21} \end{cases} \Rightarrow v_{11} = v_{21}$, on prend :

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour $\lambda_i = -4$ on a : $AV_2 = \lambda_2 V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -2v_{12} = -4v_{12} \\ 2v_{12} - 4v_{22} = -4v_{22} \end{cases} \Rightarrow v_{12} = 0 \;\; et \;\; v_{22}$, possède une infinité de solutions,

on prend : $V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

On : $T = [V_1 \;\; V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$T^{-1} = \frac{1}{\det{(T)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$D = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-2t} - e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$