

Chapitre 2

Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état

Sommaire du Chapitre 2:

2.1 Introduction.....	2
2.2 Discrétisation des équations d'état.....	2
2.3 Passage de l'équation récurrente à la représentation d'état.....	3
2.4 Passage de l'équation d'état à la fonction de transfert	6
2.5 Etude de la stabilité des systèmes discrets et échantillonnés.....	6
2.6 Etude de la précision des systèmes échantillonnés	13
2.7 Notion d'observabilité d'un système échantillonné.....	15
2.8 Notion de gouvernabilité d'un système échantillonné	16

2.1 Introduction

Tout comme les systèmes à temps continu, les systèmes à temps discret peuvent être placés sous forme de représentation d'état. Les deux formalismes sont très voisins. Deux approches traditionnelles sont souvent étudiées pour aborder la représentation d'état des systèmes discrets : la discrétisation des équations d'état continues et la représentation directe par analogie avec la représentation d'état en temps continu. Ces approches permettent de généraliser très rapidement les propriétés démontrées aux systèmes continus.

2.2 Discrétisation des équations d'état

Soit le système d'équation d'état déterministe à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

$x(t)$: $n \times 1$ vecteur d'état

$u(t)$: 1×1 vecteur de commande

$y(t)$: $m \times 1$ vecteur de sortie ou d'observation

La matrice $[A]$ est une matrice carrée, $[B]$ est un vecteur colonne et $[C]$ est un vecteur ligne

A : matrice d'état

B : matrice de commande

C : matrice d'observation

D : matrice de transfert direct

En général $D=0$ Système propre

La solution de l'équation (1) s'écrit

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Pour discrétiser le système il faut disposer d'un convertisseur numérique-analogique(CNA) ou bloqueur(BOZ) qui transforme le vecteur U_k des séquences numérique d'entrée en vecteur

des signaux à temps continu et d'un convertisseur analogique-numérique(CAN) qui transforme le vecteur des signaux de mesure en vecteur Y_k des séquences numérique.



Figure.2.1 : Discrétisation d'un système continu

Soit T_e la période d'échantillonnage. Le CNA est un bloqueur d'ordre zéro (BOZ) :

$$\forall t \in [kT_e, (k+1)T_e], u(t) = U(kT_e)$$

D'où la solution générale :

$$\begin{aligned} X(k+1)T_e &= e^{At}X(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} BU(kT_e) d\tau \\ &= e^{At}X(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} d\tau BU(kT_e) \end{aligned} \quad (3)$$

Si A est inversible cad ($\det(A) \neq 0$), la solution devient :

$$X(k+1)T_e = e^{At}X(kT_e) + [A^{-1}(e^{AT_e} - I)]BU(kT_e) \quad (4)$$

Avec I : La matrice identité, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc $X(k+1)T_e = FX(kT_e) + GU(kT_e)$

$$Y(kT_e) = CX(kT_e) \quad (5)$$

Avec $F = e^{AT_e}$, $G = [A^{-1}(e^{AT_e} - I)]B$ (Relation entre l'équation d'état d'un système continu et celle d'un système discret.)

2.2.1 Représentation d'état des systèmes discret et échantillonnés

Soit $u(k) = \begin{Bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_l(k) \end{Bmatrix}$ Vecteur de commande

$y(k) = \begin{Bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{Bmatrix}$ Vecteur d'observation

$$x(k) = \begin{Bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{Bmatrix} \text{ Vecteur d'état}$$

La représentation d'état d'un système discret prend la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = FX(k) + GU(k) \\ Y(k) = CX(k) + DU(k) \end{cases} \quad (6)$$

2.3 Passage de l'équation récurrente à la représentation d'état

a) Forme de commande

1. Exemple avec second membre simple

$$u_k \rightarrow y_k: y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = u_k \quad (7)$$

La transformée en z donne :

$$Z^2Y(Z) + 3ZY(Z) + 2Y(Z) = U(Z) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{1}{Z^2 + 3Z + 2} \quad (9)$$

Le vecteur d'état $x_1(k) = y_k$

$$x_2(k) = y_{k+1}$$

$$x_1(k+1) = y_{k+1} = x_2(k)$$

D'après l'équation (7) on trouve :

$$x_2(k+1) = y_{k+2} = -3y_{k+1} - 2y_k + u_k = -3x_2(k) - 2x_1(k) + u_k \quad (10)$$

D'où on obtient une représentation d'état sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (12)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Exemple avec second membre complexe

$$u_k \rightarrow y_k: y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 4u_k - 3u_{k+1} \quad (12)$$

Après la transformée en z on trouve la fonction de transfert suivante :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{3Z}{Z^2 + 3Z + 2} = \frac{Y(Z) X(Z)}{X(Z) U(Z)} \quad (13)$$

$$\frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{1}{Z^2 + 3Z + 2} \quad \text{et} \quad \frac{Y(Z)}{X(Z)} = 4 - 3Z \quad (14)$$

D'où tire une représentation avec un vecteur d'observation différent.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (15)$$

$$y_k = [4 \quad -3] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (16)$$

b) Forme découplé (modale)

Pour obtenir une matrice d'état diagonale on décompose la fonction de transfert en éléments simples (si les pôles sont réels).

Exemple

$$u_k \rightarrow y_k: y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 3u_{k+1} \quad (17)$$

La transformée en z donne :

$$Z^2 Y(Z) + 3ZY(Z) + 2Y(Z) = 3ZU(Z) \quad (18)$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{3Z}{Z^2 + 3Z + 2} = \frac{aZ}{Z+1} + \frac{bZ}{Z+2} \quad (19)$$

On cherche les valeurs inconnues a et b

$$H(Z) = \frac{3Z}{Z+1} - \frac{3Z}{Z+2} = \frac{H_1(Z)}{U(Z)} + \frac{H_2(Z)}{U(Z)} \quad (20)$$

En identifiant il vient

$$\frac{H_1(Z)}{U(Z)} = \frac{3Z}{Z+1}, \quad \text{et} \quad \frac{H_2(Z)}{U(Z)} = -\frac{3Z}{Z+2} \quad (21)$$

$$\begin{cases} H_1(Z)(Z+1) = 3ZU(Z) \\ H_2(Z)(Z+2) = -3ZU(Z) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} h_1(k+1) + h_1(k) = 3u_{k+1} \\ h_2(k+1) + 2h_2(k) = -3u_{k+1} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} h_1(k+1) = -h_1(k) + 3u_{k+1} \\ h_2(k+1) = -2h_2(k) - 3u_{k+1} \end{cases} \quad (24)$$

Donc la représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} h_1(k+1) \\ h_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} u_k \quad (25)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} \quad (26)$$

2.4 Passage de l'équation d'état à la fonction de transfert

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k \quad (27)$$

La transformée en z de l'équation d'état donne :

$$Z[X(Z) - x(0)] = FX(Z) + GU(Z) \quad (28)$$

$$X(Z) = [ZI - F]^{-1}GU(Z) \quad (29)$$

avec I : Matrice identité

Remplaçons l'équation (29) dans la sortie Y(Z)

$$Y(Z) = CX(Z) = C[ZI - F]^{-1}GU(Z) \quad (30)$$

$$\text{Donc } H(Z) = C[ZI - F]^{-1}G \quad (31)$$

$H(Z)$: Matrice de transfert en z

En régime statique

$$\lim_{z \rightarrow 1} C[ZI - F]^{-1}G \quad \text{: Matrice gain statique}$$

2.5 Etude de la stabilité des systèmes discrets et échantillonnés

2.5.1 Définition

Comme pour les systèmes continus, on définit la stabilité d'un système échantillonné par sa capacité à revenir de lui-même à sa position d'équilibre après avoir été excité par une perturbation. Il convient donc que sa réponse impulsionnelle vérifie la relation suivante:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(kT) = 0 \quad (32)$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{i=0}^n a_i z^i / \sum_{i=0}^d b_i z^i = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (33)$$

En supposant que les pôles Z_{pi} de la transmittance, soient simples, réels ou complexes 2 à 2 conjugués, la réponse impulsionnelle est de la forme :

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{C_1}{z - z_{p1}} + \frac{C_2}{z - z_{p2}} + \dots + \frac{C_d}{z - z_{pd}} \quad (34)$$

$$h_k = \sum_{i=0}^d C_i z_{pi}^k \quad (35)$$

Comme h_k tend vers zéro si $\forall i |z_{pi}| < 1$ on énoncera le théorème suivant :

- La transmittance $H(z)$ d'un système numérique est stable si et seulement si tous ses pôles sont situés à l'intérieur du cercle de rayon unité. Il est d'autant plus stable que ses pôles sont près de l'origine.
- En d'autres termes la stabilité du système numérique est acquise dès lors que le module de chacun de ses pôles est inférieur à 1.
- Le système est juste oscillant si ses pôles sont de module 1 (i.e. situés sur le cercle unité).

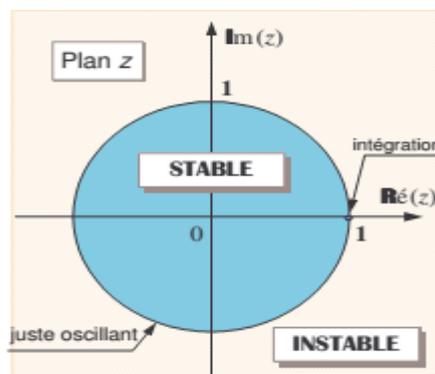
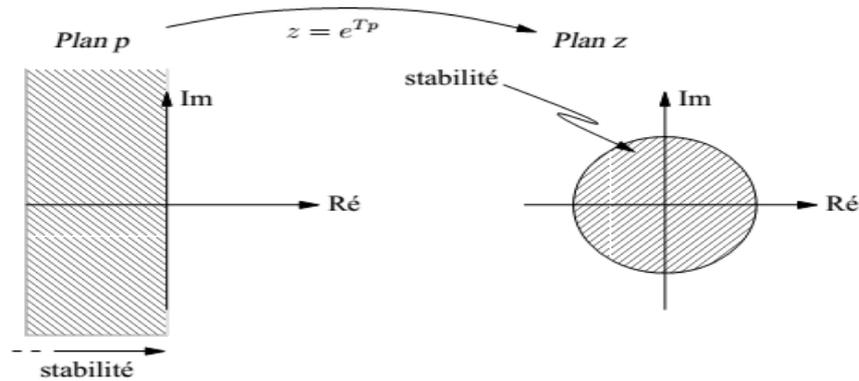


Figure 2.2 : Zone de stabilité des fonctions de transfert numériques

Sachant que $z = e^{Tp}$ posons $p = \sigma + j\omega$. La condition de stabilité s'écrit $|z| = e^{T\sigma} < 1$ ce qui équivaut à $\sigma < 0$. Ainsi on retrouve la condition de stabilité énoncée pour les systèmes continus.



Lorsqu'on ne peut pas calculer les pôles par une méthode numérique alors nous pouvons utiliser deux autres critères de stabilité.

2.5.2 Critères algébriques de stabilité

En général le calcul des racines de l'équation caractéristique du système (racines de $D(z)$) n'est pas facile en l'absence de moyen de calcul approprié (le recours au logiciel MATLAB est recommandé). Aussi utilise-t-on des critères algébriques qui, sans avoir à résoudre l'équation caractéristique, permettent de savoir si ses racines sont contenues dans le cercle unité du plan complexe z .

2.5.2.1 Critère simplifié de jury (1961)

Soit la transmittance physiquement réalisable $H(z)$:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad (36)$$

Considérons le dénominateur $D(z)$ de degré d

$$D(z) = b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \dots + b_i z^i + \dots + b_1 z + b_0 \quad \text{avec } b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Dressons le tableau suivant :

1	b_0	b_1	b_2	...	b_{d-k}	...	b_{d-2}	b_{d-1}	b_d
2	b_d	b_{d-1}	b_{d-2}	...	b_k	...	b_2	b_1	b_0
3	c_0	c_1	c_2	...	c_{d-k}	...	c_{d-2}	c_{d-1}	
4	c_{d-1}	c_{d-2}	c_{d-3}	...	c_{k-1}	...	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	d_{d-2}		
6	d_{d-2}	d_{d-3}	d_{d-4}	d_0		
...				
...				
$2d-5$	p_0	p_1	p_2	...					
$2d-4$	p_3	p_2	p_1	...					
$2d-3$	q_0	q_1	q_2						

$$\begin{aligned}
 c_k &= \begin{vmatrix} b_0 & b_{d-k} \\ b_d & b_k \end{vmatrix} & d_k &= \begin{vmatrix} c_0 & c_{d-1-k} \\ c_{d-1} & c_k \end{vmatrix} & e_k &= \begin{vmatrix} d_0 & d_{d-2-k} \\ d_{d-2} & d_k \end{vmatrix} \\
 q_0 &= \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} & q_1 &= \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} & q_2 &= \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour que toutes les racines de $D(z) = 0$ soient situées à l'intérieur du cercle unité il faut et il suffit que les $(d + 1)$ conditions suivantes soient satisfaites :

$$D(1) > 0 \quad D(-1) \begin{cases} > 0 \text{ pour } d \text{ pair} \\ < 0 \text{ pour } d \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et } (d - 1) \text{ contraintes} \quad \left\{ \begin{array}{l} |b_0| < b_d \\ |c_0| > |c_{d-1}| \\ |d_0| > |d_{d-2}| \\ |e_0| > |e_{d-3}| \\ \dots \dots \dots \\ |q_0| > |q_2| \end{array} \right. \quad (37)$$

✓ Système de second ordre

$$D(z) = z^2 + b_1z + b_0 \quad (d=2)$$

$$\begin{cases} D(1) = 1 + b_1 + b_0 > 0 \\ D(-1) = 1 - b_1 + b_0 > 0 \\ |b_0| < 1 \end{cases}$$

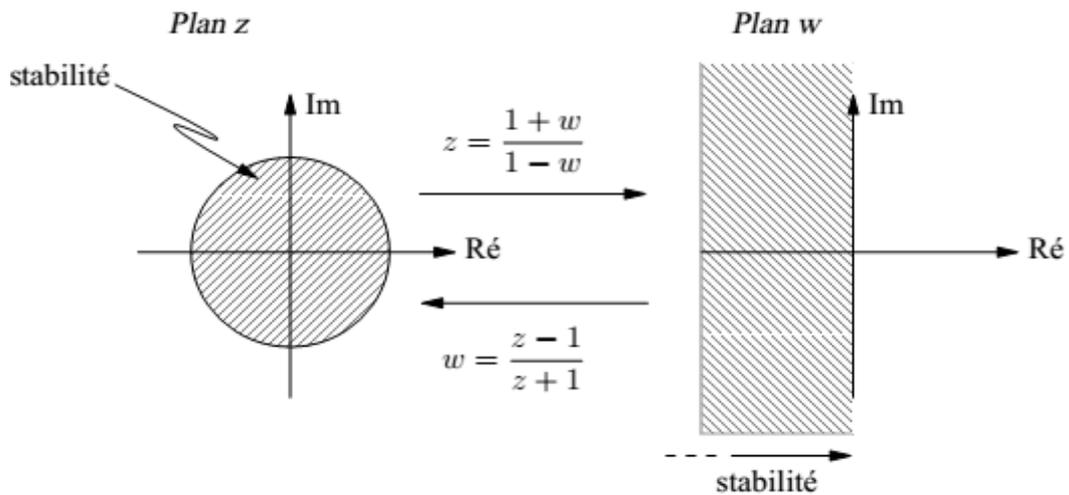
✓ Système du troisième ordre

$$D(z) = z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 \quad (d=3)$$

$$\begin{cases} D(1) = 1 + b_2 + b_1 + b_0 > 0 \\ D(-1) = -1 + b_2 - b_1 + b_0 < 0 \\ |b_0| < 1 \\ |b_0^2 - 1| > |b_0b_2 - b_1| \end{cases}$$

2.5.2.2 Critère de Routh-Hurwitz

Afin de pouvoir appliquer, pour les systèmes échantillonnés, les mêmes outils d'analyse de stabilité que pour les systèmes continus, on cherche une transformation conforme qui, à tout nombre complexe à l'intérieur du cercle unité, fasse correspondre un nombre complexe et un seul dans le demi-plan gauche du plan complexe.



Pour le passage du plan z au plan w, cette transformation se définit en posant :

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \tag{38}$$

Et pour le passage inverse (du plan w au plan z) :

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{39}$$

L'intérêt principal de cette transformation est qu'elle conserve la structure de Fractions rationnelles des fonctions de transfert. En effet, remplaçant l'expression (38) de z dans l'équation caractéristique $D(z)$, on obtient:

$$D(w) = b_d w^d + b_{d-1} w^{d-1} \dots + b_i w^i + \dots + b_1 w + b_0 \tag{40}$$

Formons le tableau de Routh:

w^d	b_d	b_{d-2}	b_{d-4}	b_{d-6}
w^{d-1}	b_{d-1}	b_{d-3}	b_{d-5}	b_{d-7}
w^{d-2}	c_1	c_2	c_3	c_4
w^{d-3}	d_1	d_2
w^{d-4}	e_1
.....
w^1
w^0

Avec

$$c_1 = \frac{b_{d-1}b_{d-2} - b_d b_{d-3}}{b_{d-1}} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_{d-3} - c_2 b_{d-1}}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{b_{d-1}b_{d-4} - b_d b_{d-5}}{b_{d-1}} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_{d-5} - c_3 b_{d-1}}{c_1} \tag{41}$$

Propriétés de stabilité

- Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que les racines de l'équation caractéristique en w soient toutes à partie réelle négative est que les coefficients de la première colonne du tableau de Routh soient tous de même signe.

Le nombre de racines instables (c'est-à-dire à partie réelle positive) est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

- Une Condition Nécessaire pour que les racines de l'équation caractéristique en w soient toutes à partie réelle négative, mais non suffisante, est que tous les coefficients de ce polynôme b_k soient de même signe.

2.5.3 Critères géométriques de stabilité

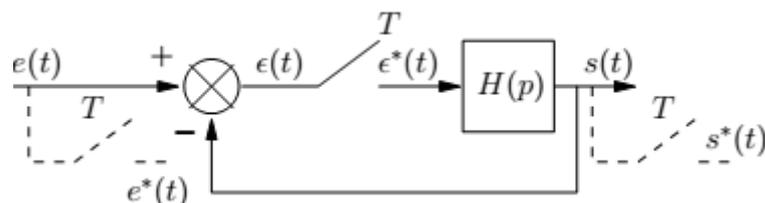
Les critères géométriques sont très souvent utilisés dans l'étude de la stabilité des systèmes asservis continus car, en plus de l'information "stable " ou "instable ", ils permettent d'avoir une mesure du degré de stabilité des systèmes asservis via la marge de gain et la marge de phase . Ces mêmes critères sont applicables aux systèmes asservis échantillonnés avec toutefois quelques précautions d'usage. Pour ceux-ci, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines d'une équation caractéristique pouvant être mise sous la forme :

$$1 + k H(z) = 0 \quad (42)$$

Où k est un scalaire positif.

2.5.3.1 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de savoir si les racines d'une expression de la forme (42) avec $k = 1$ fixé, sont à partie réelle négative en raisonnant sur le lieu de Nyquist de la fonction de transfert échantillonnée.



Méthode pour le tracé du lieu de Nyquist pour les systèmes échantillonnés :

Pour les systèmes échantillonnés, le tracé du lieu de Nyquist peut être obtenu de deux façons différentes :

- soit à partir de la fonction de transfert $H(z)$ puis en remplaçant z par $e^{j\omega T}$. On calcule alors le nombre complexe résultant du calcul de $H(e^{j\omega T})$

Dans ce cas, la pulsation ω varie de 0 à ω_N , pulsation de Nyquist où $\omega_N = 2\pi f_N = \frac{\pi}{T}$

– Soit à partir de la fonction de transfert en w de $H(z)$. Appelons $\tilde{H}(\omega)$ cette fonction de transfert. On a la relation

$$\tilde{H}(w) = H(z)$$

Ou
$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (43)$$

En remplaçant z par $e^{j\omega T}$ dans (43), on montre que

$$w = j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (44)$$

Or, lorsque ω varie de 0 à π , $j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ varie de 0 à $+\infty$. On pose alors

$$\tilde{\omega} = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (45)$$

On voit qu'en posant $\omega = j\tilde{\omega}$, où $\tilde{\omega}$ varie de 0 à $+\infty$, on obtient un changement de variable analogue au cas des systèmes continus lorsque l'on trace leur lieu de Nyquist.

Pour tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $\tilde{H}(w)$, on procède suivant la démarche suivante :

- Dresser un tableau avec en première colonne, un certain nombre de valeurs de $\tilde{\omega}$ qui soient significatives pour le tracé. Dans une deuxième colonne, reporter la vraie pulsation ω correspondante. Sur une troisième colonne, reporter le calcul de la partie réelle de $\tilde{H}(j\tilde{\omega})$ pour chacune des valeurs de ω et en dernière colonne, la partie imaginaire de $\tilde{H}(j\tilde{\omega})$.

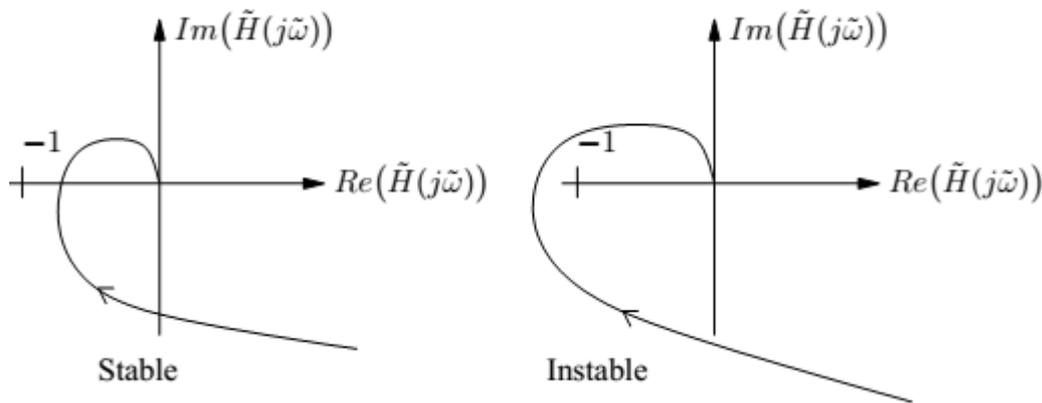
$\tilde{\omega}$	ω	$Re(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$	$Im(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$
------------------	----------	----------------------------------	----------------------------------

- Reporter sur un graphique représentant le plan complexe, la fonction $Im(\tilde{H}(j\tilde{\omega})) = f(Re(\tilde{H}(j\tilde{\omega})))$ point par point en précisant chaque valeur de $\tilde{\omega}$ et en reliant ces points dans le sens des $\tilde{\omega}$ croissants.
- Placer le point critique d'affixe $-1 + 0j$.

2.5.3.2 Critère de Nyquist simplifié (ou critère du revers)

Hypothèse : Le système est stable en boucle ouverte, autrement dit la fonction de transfert en w , $H(w)$, n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive.

Dans ce cas, le système sera stable en boucle fermée si lorsque l'on parcourt le tracé du lieu de Nyquist dans le sens des ω croissants, le point critique reste à gauche.



2.5.3.3. Lieu de Bode et lieu de Black-Nichols

Les lieux de Bode et de Black-Nichols sont obtenus comme dans le cas continu lorsque l'on considère $\tilde{H}(w)$, transformée en w de $H(z)$. Pour leur tracé, on peut alors s'aider du tableau suivant :

$\tilde{\omega}$	ω	$ \tilde{H}(j\tilde{\omega}) $	$\arg(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$
------------------	----------	--------------------------------	------------------------------------

et procéder de la même manière que pour le lieu de Nyquist. Pour le lieu de Bode, on peut aussi faire un tracé asymptotique de la fonction de transfert $\tilde{H}(w)$

2.6 Etude de la précision des systèmes échantillonnés

En plus de la stabilité, un système asservi doit présenter d'autres qualités lui permettant d'assurer des performances satisfaisantes. Dans cette partie, la précision est étudiée. Les systèmes bouclés considérés ici sont supposés stables.

2.6.1. Définition

La précision est la capacité d'un système à suivre un ensemble de consignes particulières avec une erreur acceptable par le cahier des charges.

On distingue deux types de précision :

- la précision statique qui caractérise, pour une entrée donnée, la limite de l'erreur dite statique au bout d'un temps infini, c'est-à-dire bien plus grand que la durée de la réponse libre du système. On parle de régime permanent ou encore de régime établi ,
- la précision dynamique qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus principalement pendant le régime transitoire, c'est-à-dire sur un horizon de l'ordre de grandeur de la durée de la réponse libre du système.

2.6.2 Précision statique

La structure considérée est la suivante :

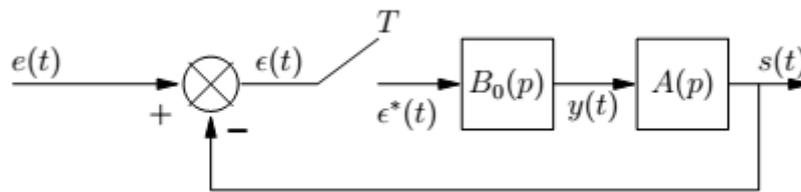


Figure 2.3: Système asservi échantillonné

La transformée en z de l'erreur $\epsilon^*(t)$ est liée à l'entrée $e(t)$ aux instants d'échantillonnage, soit $e^*(t)$, par la relation :

$$\mathcal{E}(z) = \frac{1}{1 + \overline{AB_0}(z)} E(z) \tag{46}$$

Le système bouclé étant stable, le théorème de la valeur finale peut s'appliquer et permet d'obtenir l'erreur statique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \mathcal{E}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \overline{AB_0}(z)} E(z) \tag{47}$$

L'erreur statique dépend de l'entrée test $E(z)$ qui est appliquée au système, on définit :

Définition

Considérons l'asservissement représenté en figure 2.

- L'erreur statique de position ϵ_p du système S est définie comme l'erreur statique correspondant à une entrée en échelon.
- L'erreur statique de vitesse ϵ_v du système S est définie comme l'erreur statique correspondant à une entrée en rampe.
- L'erreur statique d'accélération ϵ_a du système S est définie comme l'erreur statique correspondant à une entrée en parabole.

On rappelle que :

	Signal $e^*(t)$		
	Echelon	Rampe	Parabole
Transformée en z : $E(z)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

Il est à noter que, même si l'association "statique de vitesse" semble paradoxale, le terme "statique" se rapporte au comportement en "régime permanent" et le terme "de vitesse" à l'entrée en rampe.

2.6.3 Précision dynamique

La précision dynamique permet plus particulièrement d'étudier le comportement de ϵ_k pendant le régime transitoire. Cependant, l'expression de l'erreur dynamique ϵ_k est excessivement complexe dans le cas général. A titre indicatif, les grandeurs donnant des renseignements sur la précision dynamique peuvent être

- Le maximum de l'erreur, qui caractérise le dépassement maximal :

$$\max_{n \in \mathbb{N}} |\epsilon_n| \quad (48)$$

- L'erreur quadratique moyenne :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\epsilon_k)^2 \quad (49)$$

- L'erreur absolue moyenne, qui caractérise l'aire en valeur absolue du graphe ϵ_k :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\epsilon_n| \quad (50)$$

2.7 Notion d'observabilité d'un système échantillonné.

2.7.1 Définition.

Un système est dit observable si la connaissance de l'entrée $U(k)$ et de la sortie $Y(k)$ sur un horizon de temps $\{k_0 : k_1\}$ permet de déterminer la valeur de l'état initial $X(k_0)$.

Pour un système sous la forme

$$\begin{cases} X(k+1) = FX(k) + GU(k) \\ Y(k) = CX(k) + DU(k) \end{cases} \quad (51)$$

Avec comme instant initial $k_0 = 0$, nous obtenons en itérant cette formulation jusqu'à l'instant $(n-1)$

$$\begin{cases} X(0) = X(0) \\ X(1) = F.X(0) + H.U(0) \\ X(2) = F.X(1) + H.U(1) = F^2.X(0) + F.H.U(0) + H.U(1) \\ X(3) = F^3.X(0) + F^2.H.U(0) + F.H.U(1) + \dots + H.U(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ X(n-1) = F^{n-1}.X(0) + F^{n-2}.H.U(0) + F^{n-3}.H.U(1) + \dots + H.U(n-2) \end{cases} \quad (52)$$

$$[H \quad F.H \quad \dots \quad F^{n-3}.H \quad F^{n-2}.H \quad F^{n-1}.H] \begin{bmatrix} U(n-1) \\ U(n-2) \\ \vdots \\ U(1) \\ U(0) \end{bmatrix} = X(n) - F^n.X(0)$$

Pour trouver la séquence de commande conduisant à l'état désiré, il faut que la matrice G soit de rang n

Avec $G \triangleq [H \quad F.H \quad \dots \quad F^{n-3}.H \quad F^{n-2}.H \quad F^{n-1}.H]$ et n : l'ordre du système