Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse fonctionnelle
$1^{ère}$ année Master EDP et applications (2018/2019)

Examen final (Durée: 90min)

==

Exercice 1: (07 pts)

1- Donner la définition d'un(e)
Opérateur compact, Convergence faible.

2- Enoncez le théorème de réprésentation de Riesz

3- Soit H un espace de Hilbert, et $T \in \mathcal{L}(H,H)$. Montrer que:

$$Im(T)^{\perp} = ker(T^*).$$

==

Exercice 2: (03.50 pts)

Soit T l'application de $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ dans lui-même définie par

$$\begin{array}{llll} T: & \ell_2 & \to & \ell_2 \\ & x = (x_i)_i & \to & T(x) = T((x_i)_i) = (0, x_0, x_1, x_2 \ldots). \end{array}$$

Vérifier que T est continue et calculer son adjoint ?

==

Exercice 3: (09.50 pts)

Soient $E = L^2([0,1])$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions réelles de carré intégrable et T une application définie par

$$\begin{array}{llll} T: & L^2([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & T(f) = \int_0^1 f(x)dx \end{array}$$

1) Montrer que T est une forme linéaire continue et calculer sa norme ?

2) Montrer que $F = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ est un fermé de $L^2([0,1])$?

3) Déterminer $F^{\perp}$?

4) Enoncez le théorème de la projection orthogonale ?

5) Déterminer la projection de $f(t) = e^t$ sur F et calculer $d(f, F)$?

==

$\mathcal{R}\cdot \mathcal{HERAIZ}$ Bon courage

==

Exercice 1

1- La définition d'un opérateur compact: voir le polycopie " Définition 5.4 page **30**"

La définition de la convergence faible: voir le polycopie " Proposition 4.2 page **25**"

2- Le théorème de réprésentation de Riesz: voir le polycopie " Théorème 2.20 page **17**"

3- Soit H un espace de Hilbert, et $T \in \mathcal{L}(H,H)$. Montrons

$$Im(T)^{\perp} = ker(T^*).$$

Soit

$$\begin{aligned} x \in Im(T)^{\perp} &\Leftrightarrow \langle x, T(y)\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow \langle T^*(x), y\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow T^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ker(T^*) \end{aligned}$$

Exercice 2 ==

Soit T l'application de $\ell_2 = \ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ dans lui-même définie par

$$\begin{array}{rlll} T: & \ell_2 & \to & \ell_2 \\ & x = (x_i)_i & \to & T(x) = T((x_i)_i) = (0, x_0, x_1, x_2 \ldots). \end{array}$$

Il est simple de vérifier que l'application T est une isométrie

$$\|T((x_i)_i)\| = \|(x_i)_i\|,$$

alors T est continue et sa norme égale à 1.

Soient $x = (x_i)_{i\geq 0}$ et $y = (y_i)_{i\geq 0}$. si T^* est l'opérateur adjoint de T, alors

$$\begin{aligned} \langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle &\Leftrightarrow \left\langle (x_i)_{i\geq 0}, T\left((y_i)_{i\geq 0}\right)\right\rangle = \left\langle T^*((x_i)_{i\geq 0}), (y_i)_{i\geq 0} \right\rangle \\ &\Leftrightarrow x_0 \times 0 + \sum_{i\geq 1} x_i y_{i-1} = \left\langle T^*((x_i)_{i\geq 0}), (y_i)_{i\geq 0} \right\rangle, \end{aligned}$$

on a

$$\left\langle T^*((x_i)_{i\geq 0}), (y_i)_{i\geq 0} \right\rangle = \sum_{i\geq 1} x_i y_{i-1} = \sum_{i\geq 0} x_{i+1} y_i = \left\langle (x_{i+1})_{i\geq 0}, (y_i)_{i\geq 0} \right\rangle$$

ce qui donne

$$T^*((x_0, x_1, x_2 \ldots)) = (x_{i+1})_{i\geq 0} = (x_1, x_2, x_3 \ldots).$$

Exercice 3 ==

Soient $E = L^2([0,1])$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions réelles de carré intégrable et T une application définie par

$$\begin{array}{rlll} T: & L^2([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & T(f) = \int_0^1 f(x)dx \end{array}$$

1) La linéarité: évidente.

La continuité: On a

$$\begin{aligned}
|T(f)| &\leq \int_0^1 |f(x)|\, dx \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \left(\int_0^1 1dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2
\end{aligned}$$

alors $T \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\|f\|_{E^*} \leq 1$.
Si on pose $f \equiv 1$, alors on a $\|f\|_E = 1$ et $|T(f)| = 1$ ce qui donne $\|f\|_{E^*} = 1$
2) La partie $F = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ est fermée de $L^2([0,1])$ car

$$F = KerT = T^{-1}(\{0\}). \text{ Image réciproque d'un fermé par une application continue}$$

3) Détermine $F^{\perp}$, on a

$$\begin{aligned}
F &= \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\} \\
&= \{f \in E : \langle f, 1\rangle = 0\} \\
&= [1]^{\perp}
\end{aligned}$$

alors

$$F^{\perp} = [1]^{\perp\perp} = [1]$$

4) Le théorème de la projection orthogonale: voir le polycopie "Théorème 1.2.3 page 7"
5) La projection de $f(t) = e^t$ sur F notée par exemple $P_F(f)$. D'après le théorème de la projection

$$P_F(f) \in F = [1] \Rightarrow \int_0^1 P_F(f)\, dx = 0 \tag{1}$$

$$f - P_F(f) \in F^{\perp} = [1] \Rightarrow f - P_F(f) = \lambda \Rightarrow P_F(f) = f - \lambda \tag{2}$$

(1) et (2) donnent

$$\int_0^1 (f(x) - \lambda)\, dx = 0 \Rightarrow \lambda = e - 1$$

Conclusion

$$P_F(f) = e^t - e + 1$$

Calcul $d(f, F)$.

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\| = \|f - P_F(f)\| = e - 1$$

==