Université de M'sila
Département de Mathématiques
Module : Analyse fonctionnelle
$1^{ère}$ année Master EDP et applications (2019/2020)

Examen final (Durée: 90min)

===

Exercice 1: (05 pts)

1- Montrer que la convergence forte $(x_n \to x)$ implique la convergence faible $\left(x_n \xrightarrow{w} x\right)$.

2- Soit H un espace de Hilbert et soit $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$.

a- Comment définir l'opérateur adjoint de T.

b- Montrer que

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$

Exercice 2: (08 pts)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$. On définit sur cet espace trois normes,

$$f \longmapsto \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \ f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|.$$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application

$$\varphi(f) = \int_0^1 x(1-x) f(x) dx.$$

1- Montrer que φ est une forme linéaire sur E, continue lorsqu'on munit E de l'une quelconque des normes définies ci-dessus.

2- Calculer, dans chaque cas, la norme de φ lorsque le dual de E est muni de la norme associée à la norme choisie sur E. [On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $f_n(x) = x^n(1-x)^n$.]

3- On muni E par le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. On définit le sous-espace vectoriel de E

$$F = \{f \in E : f(0) = 0\}$$

Déterminer $F^\perp$.

Exercice 3: (07 pts)

Soit $E = \ell_2$ sur $\mathbb{R}$ et T une application définie par

$$\begin{array}{cccc} T : E & \to & E & \\ x = (x_i)_{i \ge 1} & \to & T((x_i)_i) & = (\frac{x_i}{i^\alpha})_i \text{ avec } \alpha > \frac{1}{2} \end{array}$$

1- Montrer que $T \in \mathcal{L}(E, E)$.

2- Donner la définition d'un

Opérateur de rang fini, Opérateur compact.

3- On pose $T_n(x) = (\frac{x1}{1}, \frac{x_2}{2^\alpha}, \frac{x_3}{3^\alpha}, ..., \frac{x_n}{n^\alpha}, 0, 0, 0, ...)$. Montrer que T_n est de rang fini pour tout n.

4- Montrer que tout opérateur de rang fini est compact.

5- Estimer $\|T_n - T\|$ puis déduire que T est compact.

===

R. HERAIZ — Bon courage

Correction de l'examen (Ana. fonct. pour EDP) 2019/2020
===

Exercice 1
1- La convergence forte $(x_n \to x)$ implique la convergence faible $\left(x_n \stackrel{w}{\to} x\right)$ car

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| &= |\varphi(x_n - x)| \\ &\le \|\varphi\| \, \|x_n - x\| \to 0 \end{aligned}$$

2- Soit H un espace de Hilbert et soit $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$.
2-a- Pour $T \in \mathcal{L}(H, H)$, il existe un autre opérateur, noté T^*, et appelé l'adjoint de T, tel que :

$$\langle \varphi, Tx \rangle_H = \langle T^* \varphi, x \rangle_H \text{ pour tout } x \in H \text{ et toute } \varphi \in H_2$$

De plus $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)}$
2-b- Soient $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$, on a

$$\begin{aligned} \langle (T+S)^*(x), y \rangle &= \langle x, T(y) + S(y) \rangle \\ &= \langle x, T(y) \rangle + \langle x, S(y) \rangle \\ &= \langle T^* x, y \rangle + \langle S^* x, y \rangle \\ &= \langle (T^* + S^*) x, y \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne $(T+S)^* = T^* + S^*$.
Exercice 2 ==

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)| \text{ et } f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx.$$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application

$$\varphi(f) = \int_0^1 x(1-x) f(x) dx.$$

La linéairité est évidente.
Montrons que φ est une forme linéaire sur continue E.
a- On munit E de la norme $\|f\|_\infty$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\le \int_0^1 |x(1-x) f(x)| \, dx \\ &\le \|x(1-x)\|_\infty \|f\|_1 \\ &\le \frac{1}{6} \|f\|_\infty \end{aligned}$$

car

$$\|x(1-x)\|_1 = \int_0^1 |x(1-x)| \, dx = \frac{1}{6}$$

La forme linéaire φ est donc continue et sa norme $\|\varphi\|_{E^*} \le \frac{1}{6}$. Nous allons montrer qu'en fait $\|\varphi\|_{E^*} = \frac{1}{6}$.

pour $f_n(x) = x^n(1-x)^n$, on a $\|f_n\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |x^n(1-x)^n)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{(n+1)^n}$. En choisissant pour ce cas la fonction constante égale à $f_0 = 1$, on voit que $\|f_0\|_\infty = 1$ et $|\varphi(f_0)| = \frac{1}{6}$. On en déduit $\|\varphi\|_{E^*} = \frac{1}{6}$.
b- On munit E de la norme $\|f\|_2$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \int_0^1 |x(1-x)f(x)|\,dx \\ &\leq \|x(1-x)\|_2 \|f\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{30}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

car

$$\|x(1-x)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

La forme linéaire φ est donc continue et sa norme $\|\varphi\|_{E^*} \leq \frac{1}{\sqrt{30}}$. Nous allons montrer qu'en fait $\|\varphi\|_{E^*} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.
En choisissant pour ce cas la fonction égale à $f_1(x) = x(1-x)$, on voit que $|\varphi(f_1)| = \frac{1}{30}$. On en déduit $\|\varphi\|_{E^*} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.
3- Soit $f \in F^\perp$. Alors l'application $g(x) = xf(x)$ appartient F, et donc $\langle f, xf(x)\rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 xf^2(x)dx = 0$$

L'application $x \to xf^2(x)$ est continue sur $[0,1]$, positive, d'intégrale nulle, elle est donc identiquement nulle. On en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et par continuité on a aussi $f(0) = 0$. Ainsi $f = 0$. d'ou $F^\perp = \{0\}$
Exercice 3 ==
La linéairité est évidente. Soit $x = (x_i)_i \in \ell_2$

$$\|T(x)\|_E^2 = \sum_{n\geq 1} \left|\frac{x_i}{i^\alpha}\right|^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_i|^2}{i^{2\alpha}} \leq \sum_{n\geq 1} |x_i|^2 \leq \|x\|_E^2$$

alors $\|T(x)\|_E \leq \|x\|_E$ d'ou la continuité
2- **Déf.** T est un opérateur de rang fini si $Im(A)$ est de dimension finie.
Déf.T est compacte$\Leftrightarrow \overline{T(B_E)}$ est compact dans F.
3- Montrons que $\dim(T_n(E)) < +\infty$ c-à-d $T_n(E)$ admet une base

$$T_n(x) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2^\alpha}, \frac{x_3}{3^\alpha}, ..., \frac{x_n}{n^\alpha}, 0,0,0, ...) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = \sum x_ke_k$$

où

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,...,0,0,0,0,.....) \\ e_2 &= (0,\frac{1}{2^\alpha},0,...,0,0,0,0,.....) \\ &\cdots \\ e_n &= (0,0,0,...,\frac{1}{n^\alpha},0,0,0,.....) \end{aligned}$$

donc le systeme $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E.

4- Comme T est continu alors $T(B_E)$ est borné donc $\overline{T(B_E)}$ est aussi partie bornée et en plus fermée dans un espace de dimension fermée alors $\overline{T(B_E)}$ est une partie compacte.
5- $\|T_n - T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T_n(x) - T(x)\|$ on a

$$T_n(x) - T(x) = (0, 0, ...0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, , ...)$$

donc

$$\|T_n(x) - T(x)\|^2 = \sum_{i \geq n+1} \left| \frac{x_i}{i^\alpha} \right|^2.$$

puisque $\|x\|^2 = 1 = \sum |x_i|^2$ ce qui donne $|x_i| \leq 1 \; \forall i$ alors

$$\|T_n(x) - T(x)\|^2 \leq \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i^{2\alpha}}.$$

Posons

$$R_n = \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i^{2\alpha}} \text{ est le reste de série de Riemann } \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^{2\alpha}}. \text{ comme } 2\alpha > 1 \text{ donc } R_n \to 0.$$

Conclusion: Commme $(T_n) \subset K(E, F)$ et $\|T_n - T\| \to 0$, alors T est compact.