Université de Msila,
Faculté : M. I
Département des Mathématiques

TD, théorie des relations
Fevrier 2020

Exercice 1

Confirmer ou infirmer: si R est une relation qui est à la fois symétrique et antisymétrique, alors R n'est autre que la relation d'égalité "=".

Exercice 2

Complèter et démontrer un théorème de la forme:

Un ensemble de parties $\wp(X)$, ordonné par inclusion, est une chaîne ssi .
.

Exercice 3(10 pts)

Soit $E = \{a, b, c\}$, Φ l'ensemble de toute les relations binaires définies sur E et Ψ l'ensemble de toute les relations d'ordre définies sur E, et soit $R \in \Psi$.

1. Montrer que R^{-1} est une relation d'ordre.
2. Calculer $R \cap R^{-1}$. En déduire que $R \cap R^{-1}$ est une relation d'ordre.
   On définit sur Ψ et Φ la relation suivante $R_1, R_2 \in \Psi(\text{resp } \Phi).R_1 \leq R_2 \Leftrightarrow R_1 \subset R_2$
3. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur Ψ et Φ.
4. Donner le plus petit élément de Ψ ainsi que celui de Φ.
5. Donner deux éléments maximaux de Ψ.
6. Quelle est le plus grand élément de Φ?
7. Etudier la relation suivante : $R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$.

Exercice 4(5 pts)

Soit $(x_n)_{0 \leq n \leq 100}$ une suite de 101 nombres réels. Démontrer que cette suite contient

a. soit une suite croissante d'au moins 11 nombres.

b. soit une suite décroissante d'au moins 11 nombres.

Exercice 5

[Ordres sur les mots] Soit $(V, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Un mot (de longueur p) sur V est une suite $a_1a_2...a_p$ de p éléments de V . On note V^* l'ensemble des mots sur V et l'on définit une relation $\leq_1$sur V^* en posant $a_1a_2...a_p \leq_1 b_1b_2...b_q$ s'il existe i avec $0 \leq i \leq p$ tel que $a_1 = b_1, ..., a_i = b_i$ et tel que $(i = p \leq q$ ou $(i < p$ et $a_{i+1} < b_{i+1}))$.

1. Montrer que $\leq_1$ est un ordre total – appelé ordre lexicographique – sur l'ensemble des mots (c'est l'ordre usuel des dictionnaires).

On définit une seconde relation $\leq_2$ sur les mots en posant
$a_1a_2...a_p \leq_2 b_1b_2...b_q$ si $p < q$ ou si $(p = q$ et $a_1a_2...a_p \leq_1 b_1b_2...b_q)$.

2. Montrer que $\leq_2$est un ordre total (c'est l'ordre des dictionnaires de mots croisés).

On définit une troisième relation $\leq_3$ sur les mots en posant $a_1a_2...a_p \leq_3 b_1b_2...b_q$ si $p \leq q$ et si, pour $j = q - p + 1$, on a $a_1a_2...a_p = b_jb_{j+1}...b_{j+p-1}$.

3. Montrer que $\leq_3$ est un ordre, appelé ordre facteur droit sur V^*.

4. Comment définirait-on un ordre facteur gauche sur V^* ? 5. Même question pour un ordre facteur.

On pose $V = \{a < b\}$ et $V_3^* = \{$mots de V^* de longueur au plus égale à 3$\}$.

6. Représenter les diagrammes de V_3^*muni de chacun des ordres précédents.