Ch 3 : Resolution des systeme hyperstatique
Methode des forces.

3-I . Introduction

On trouve deux systemes de structures:

- Les structures isostatiques dites « statiquement determinées »
- Les structures hyperstatiques dites: « statiquement indeterminées »

Les structure isostatiques sont celles où les trois equations de la statique sont suffisantes les actions (reactions d'appuis et les moments) peuvent être calculées en utilisant tout simplement les équations d'équilibre

Par contre, pour les structures hyperstatiques les équations d'équilibre ne sont pas suffisants pour determiner les réactions d'appuis et les actions internes. Cela veut dire que le nombre des inconnues (les reactions d'appuis) est strictement superieur au nombre d'equations d'équilibre. La difference entre le nombre des inconnues du problème et le nombre des équations d'equilibre est appelé degré d'hyperstaticité du systeme ou de la structure

Exemple:

systeme isostatique (figure 3-1)

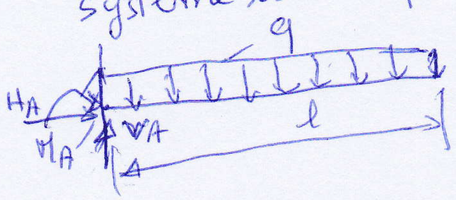

Fig 3.1 structure isostatique

Equilibre vertical : $\sum F_y = V_A - ql = 0$

Equilibre horizontal : $\sum F_H = 0 = H_A$

Equilibre de rotation : $\sum \mathcal{M}_{/A} = M_A + q\frac{l^2}{2} = 0$

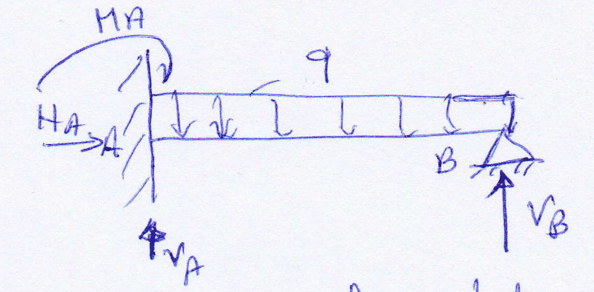

Figure 3.2 structure hyperstatique

Equilibre vertical : $\sum F_V = V_A - ql + V_B = 0$

Equilibre horizontal : $\sum F_H = H_A = 0$

Equilibre de rotation : $\sum \mathcal{M}_{/A} = M_A + \frac{ql^2}{2} = 0$

- Pour la figure 3.1 : 3 equations indépendantes lineaires ($\sum F_V = 0$, $\sum F_H = 0$ et $\sum \mathcal{M}_{/A} = 0$) 3 inconnues et 3 reactions (V_A, H_A et M_A) qui peuvent être calculées.

- Pour la figure 3.2 : 3 equations independantes lineaires ($\sum F_V = 0$; $\sum F_H = 0$ et $\sum \mathcal{M}_{/A} = 0$) 4 inconnues ($V_A$, V_B, H_A et M_A)

il manque une équation pour calculer les reactions d'appuis. on dit que le système est 1 fois hyperstatique.

Ainsi on définit le degré d'hyperstaticité d'un systeme comme une valeur qui donne le nombre d'inconnues supplementaires.

3-2 Principe de la méthode des forces

Pour calculer un système hyperstatique d'orden ($H = n$) on le transforme en un systeme isostatique en supprimant les n liaisons surabondantes ⇒ il faut faire des coupures (n coupure), une par inconnue hyperstatique. Pour que le système isostatique soit equivalent au système initial, il faut remplacer chaque liaison supprimée par la force qui lui correspondant (fig. 3.3)

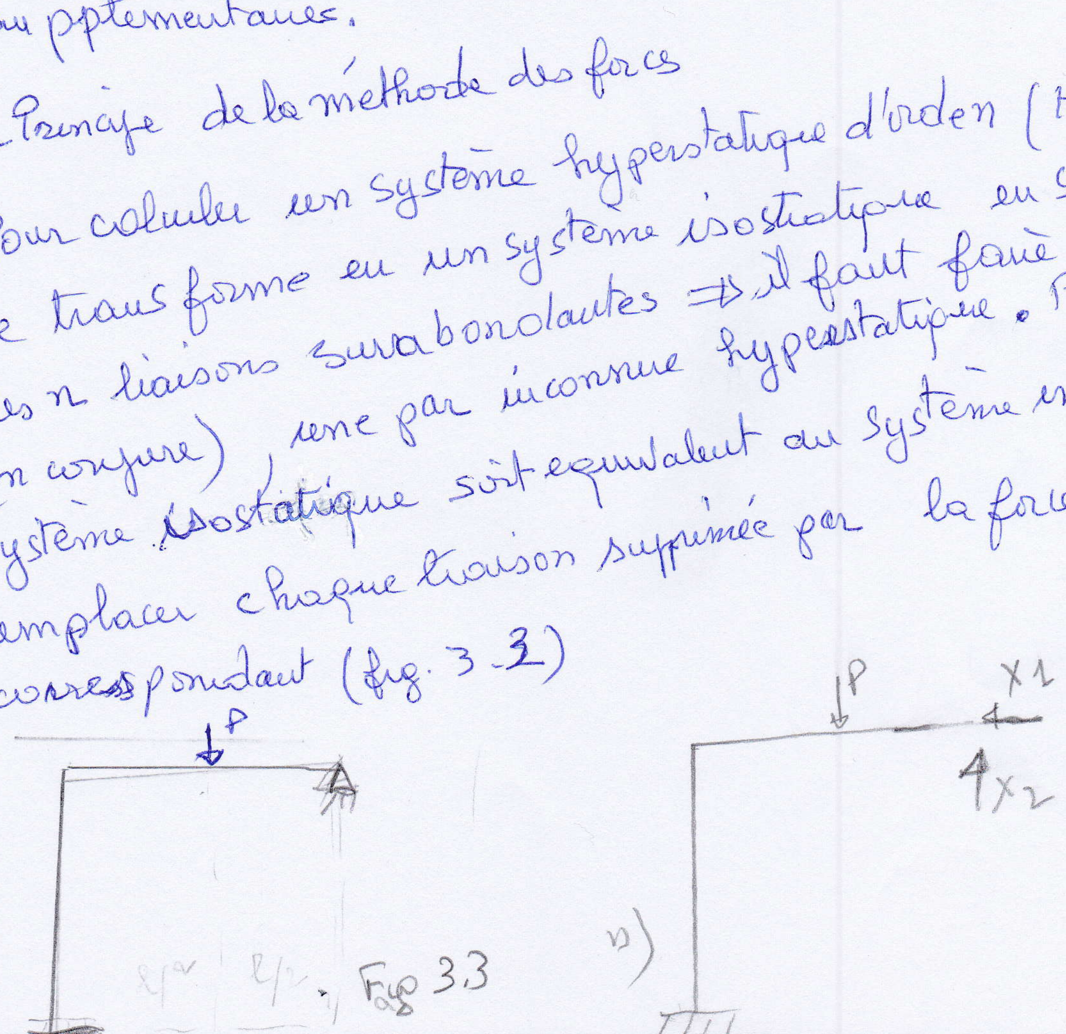

Fig 3.3

Les inconnues hyperstatiques X_1 et X_2 de l'exemple considéré sont obtenues en utilisant l'équation : $\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0$.

Le système d'équation s'écrit :

Théorème de Ménabréa

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0 \end{cases}$$

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par système de base, système fondamental ou encore système principal.

Lorsqu'on a déterminé les inconnues hyperstatiques, la construction des diagramme M, N, T revient à tracer les diagrammes d'un syst isostatique soumis, simultanément aux charges données (la sollicitation globale F) et aux forces calculées (X_1; X_2, ... X_n). L'application du principe de superposition simplifie le travail quelque peu.

3-3. Equations de continuité

Pour un système concordant d'ordre n on aura un système de n équations :

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = 0 \quad , \frac{\partial W}{\partial X_2} = 0 \dots \dots \frac{\partial W}{\partial X_j} = 0 \dots \dots \frac{\partial W}{\partial X_n} = 0$$

On peut montrer que chacune de ces équations peut se mettre sous la forme ci-après, connue sous le nom de formule de Müller-Breslau (ou de Bertrand de Fontviolant)

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} X_i \delta_{ji}^{4} + \delta_j F = 0 \qquad j = 1, 2 \dots n$$

et le système des n équations de continuité peut se mettre sous la forme explicite suivante:

$$\begin{cases} \delta^u_{11} X_1 + \delta^u_{12} X_2 + \dots \delta^u_{1n} X_n + \delta_{1F} = 0 \\ \delta^u_{21} X_1 + \delta^u_{22} X_2 + \dots \delta^u_{2n} X_n + \delta_{2F} = 0 \\ \text{— — — — — — — —} \\ \delta^u_{n1} X_1 + \delta^u_{n2} X_2 + \dots \delta^u_{nn} X_n + \delta_{nF} = 0 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle!

$$[\delta^u]\{X\} = \{-\delta_F\}$$

Ces équations sont appelées les équations canonique de la méthode des forces.

- $[\delta_{ij}]$: matrice des coefficients de flexibilité
- δ_{ij} : represente le coefficient de flexibilité c'est le déplacement produit dans la section (i) selon la direction de la force X_i causée par une force $X_j = 1$
- δ_{10} : représente le déplacement produit dans la section (i) du système de base sous l'effet des charges appliquées (charges externes)
- Pour la determenation des déplacement generalisés, nous devons utiliser des entegrals de Mohr.