Ch 4 - Critères limite de résistance.

4-1 - Notions générales

Après avoir déterminé le champ des contraintes dans une pièce, l'ingénieur doit encore calculer la sécurité de cette pièce, compte tenu de la résistance limite du matériau utilisé.

La notion de sécurité n'est pas facile à définir, car cette résistance limite dépend non seulement de l'intensité des contraintes, mais encore de leur variations dans le temps (contraintes statiques ou cycliques ...)

- Les matériaux ductiles (acier doux), la limite de rupture (σ_r) est plus élevée que la limite élastique, il est alors nécessaire de distinguer la sécurité vis à vis de l'une ou de l'autre.
- les matériaux fragiles (exple le verre ou la fonte ordinaire) se cassent brusquement sans écoulement plastique préalable : la limite d'élasticité et la limite de rupture sont atteintes simultanément.

Nous appelons rupture, aussi bien la rupture effective d'un matériau fragile que le dépassement de la limite élastique d'un matériau ductile

4-1-1 Etat limite de contrainte

Soit un élément de matière soumis à des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) provoquant le dépassement de la limite élastique de l'élément ;

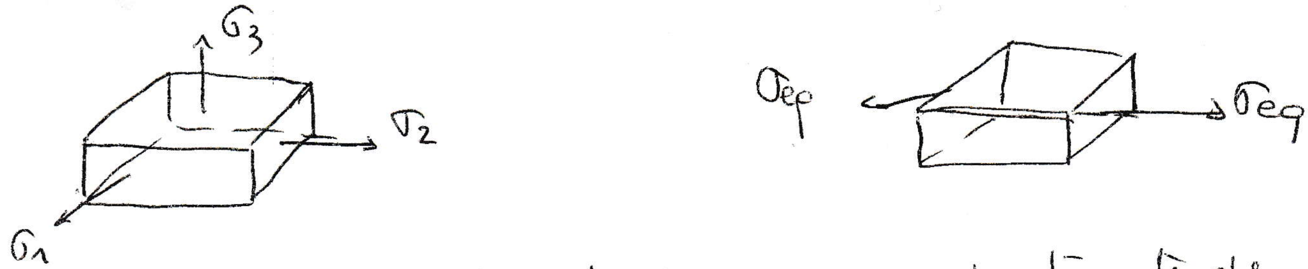


fig 4-1 état de contrainte ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (a) et contrainte de comparaison (b)

4-1-2- coefficient de sécurité

A partir d'un état non limite $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, il existe une petite valeur "s" pour laquelle $(s\sigma_1, s\sigma_2, s\sigma_3)$ est un état limite du matériau, "s" est appelé coefficient de sécurité

4-1-3 contrainte de comparaison.

un état $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, présentant un coefficient de sécurité "s" vis à vis de l'état critique correspondant, peut être caractérisé par une contrainte de traction simple σ_{eq} ayant le même coefficient de sécurité "s" vis à vis de la traction simple. Cette contrainte est appelée contrainte de comparaison ou contrainte équivalente.

La physique du solide est incapable de prévoir exactement quand une combinaison $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ devient un état limite. Elle se base alors sur certains critères de rupture (limite de l'équilibre élastique) dont le but et de permettre la prévision d'un état limite sur la base d'un petit nombre d'essais ou même d'un seul et en faire la comparaison, (traction...

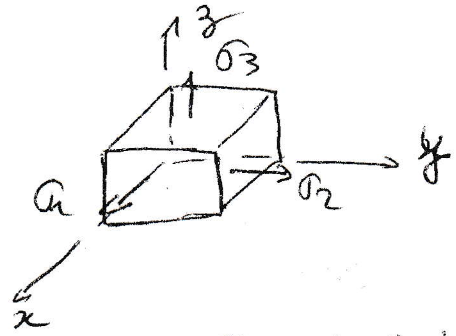
4.1-4 Loi de Hooke généralisée

Soit un élément cubique soumis aux contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la déformation dans une direction donnée (x, y ou z) peut s'exprimer d'après la loi de Hooke ainsi

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \frac{\sigma_1}{E} - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_y = \frac{\sigma_2}{E} - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_z = \frac{\sigma_3}{E} - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$



E = module d'élasticité longitudinale ou module de HOOKE

ν = coefficient de Poisson.

Ces équations représentent la loi de Hooke généralisée pour un matériau homogène et isotrope.

4-2. Les critères de résistance limite.

4.2-1 Critère de la contrainte maximale ou Théorie de Rankine.

Selon ce critère, un matériau se rompt quand la contrainte principale maximale dépasse la contrainte limite de traction ou quand la contrainte principale minimale dépasse la contrainte limite de compression. (Ces contraintes sont prises comme contraintes équivalentes).

Soient σ_{eq} = limite élastique de traction et

σ'_{eq} = limite élastique de compression

Ici pour un solide sollicité par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

on a $\sigma_1 < \sigma_{eq}$

et $\sigma_3 > \sigma'_{eq}$

ou $|\sigma_1|$ ou $|\sigma_3| < |\sigma_{eq}|$ $\quad$ ($\sigma'_{eq} = -\sigma_{eq}$) pour certains matériaux cette Theorie ne tiend pas compte de l'effet de σ_2 et l'effet de la contrainte de cisaillement sur d'autres plan de l'element.

La verification pratique n'a pas confirmé ce critere pour certains materiaux (cas du cisaillement pur des materiaux ductils.

4-2-2- Critere de la deformation maximale ou Theorie de Saint-Venant.

Il consiste à dire que la dilatation lineique maximale ε_1 doit être inferieur à la dilatation lineique elastique de traction simple (εeq)

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{eq} \qquad \text{et } \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

or $|\varepsilon_{eq}| = \left|\frac{\sigma_{eq}}{E}\right|$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \leq \varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{E}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{eq}$$

$$\text{et } \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)\right) \leq \frac{\sigma'_{eq}}{E} \qquad \left(\varepsilon'_{eq} = \frac{\sigma'_{eq}}{E}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1) \leq \sigma'_{eq}$$

Bien que cette Theorie considere la contrainte intermediaire σ_2, elle est satisfaite pour les materiaux fragile, moins pour les materiaux ductiles.

4-2-3 Critere de la tission maximale (ou cisaillement maximal) ou critere de Guest et Tresca.

Appelé aussi critere de Guest et Tresca.

Il admet que la rupture survient desque la plus grande contrainte de cisaillement $\tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, depasse la valeur τ_{eq} determiné par l'essai de torsion

Le tracé du cercle de Mohr de l'etat de contrainte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ indique

que $\tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max}$

et le tracé de ~~Mohr~~ de la contrainte equivalente (σ_{eq}, où ($\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$)) de traction simple donne $\tau_{eq_{max}} = \frac{\sigma_{eq}}{2}$

$$\text{Alors } \tau_{31} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{eq}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_{eq}}{2} \Longleftrightarrow \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{equ}.$$

L'influence de σ_2 dans un état de contrainte tridimensionnel n'est pas prise en charge, mais il donne de bons resultats pour les materiaux ayant une égale résistance en traction et en compression.

4.2-4 Critère de l'energie de déformation (de distorsion maximale) ou critère de Von-Mises.

Ce critère s'enonce comme suit :

L'energie fournie pour augmenter ou diminuer le volume initial ne joue aucun rôle dans la rupture de l'equilibre élastique, seule l'energie fournie pour déformer le volume entrant en ligne de compte.

Ce critère est basé sur la capacité de l'energie potentielle spécifique de la deformation élastique emmagasinée dans l'element.

si on fait l'hypothese que deux états sont équivalents lorsque les energies de variation (distorsion) sont égales, on peut calculer la contrainte equivalente σ_{eq} et la condition de resistance s'écrit alors :

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]} \leq \sigma_{eq}$$

σ_1, σ_2, σ_3 étant les contraintes principales

si l'état de contrainte n'est pas déterminé par les contraintes principales mais par les contraintes sur un élément repéré par 3 axes quelconques

On a . la condition de résistance :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2\right)\right]} \leq \sigma_{eq}$$

Pour le cas plan défini par les contraintes σ_x et τ_{xy} (flexion plane)

$\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$ et $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

La condition sera :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{ep}.$$

Ce critère donne des résultats satisfaisants pour les matériaux ductiles et moins pour les matériaux dont les limites de traction et compression sont différentes ($|\sigma_{eq}| \neq |\sigma_{ep}|$).

4 2-5 . Critère de la courbe intrinsèque ou de Mohr-Caquot.

La courbe intrinsèque d'un matériau est une courbe expérimentale C'est l'enveloppe des cercles de Mohr, tracés pour différents états de contrainte, chacun d'eux plaçant le matériau à la limite élastique.

Ce critère part de l'hypothèse que la résistance des matériaux dépend principalement de la valeur et du signe de la

La plus grande contrainte principale σ_1 et de ceux de la plus petite contrainte principale σ_3.

si $|\sigma_{trac}| \neq |\sigma_{com.}|$ on pose $[\sigma_+]$ et $[\sigma_-]$ ou $|\sigma_{eq}| \neq |\sigma'_{eq}|$

La condition de resistance s'écrit ainsi

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq \sigma_{eq} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 - \frac{\sigma_{eq}}{\sigma'_{eq}} \cdot \sigma_3 \leq \sigma_{eq}$$

ce critère permet de déterminer la resistance à la destruction des materiaux dont la resistance à la traction et celle de compression sont differents.

Conclusion :

On doit noter que les critères de resistance sont nombreux et ceux présentés dans ce chapitre ne sont que les critères classiques les plus utilisés en R.D.M.