1. Introduction

Le problème d'optimisation avec contraintes consiste à chercher une solution admissible $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ minimisant une fonction objective f(x), soumise à des contraintes de type égalité ou inégalité ou mixte. Le problème à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\underset{x}{\textbf{Minimiser}}\ (f(x))$$

$$\text{Soumise à : } \begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1,2,\dots\dots,p \\ h_j(x) \leq 0 & j = 1,2,\dots\dots,q \end{cases} \qquad (3.1)$$

2. Optimisation avec contraintes de type égalité

Le problème d'optimisation avec contraintes de type égalité s'écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$
$$\text{Soumise à : } g_i(x) = 0 \qquad i = 1,2,\dots\dots,p \qquad (3.2)$$

On suppose que les fonctions $g_i(x)$ sont continues et continûment dérivables.
Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode d'Euler-Lagrange (multiplicateurs de Lagrange). Cette approche consiste à transformer un problème avec contraintes en un problème sans contraintes.
Premièrement, on forme la fonction de Lagrange(Lagrangien) :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x)$$
$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \qquad (3.3)$$

Deuxièment, en cherche les points critiques de la fonction Lagrangien.
Le gradient du Lagrangien $L(x,\lambda)$ doit être nul :

$$\nabla_{(x,\lambda)} L(x,\lambda) = \begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_n} = 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (3.4)$$

Pour étudier la nature des points critiques trouvés, on utilise la condition de deuxième ordre qui consiste à étudier le signe des racines du déterminant de la matrice Q(w) définie par :

$$Q(w) = \begin{bmatrix} wI_{nxn} - \nabla_x^2 L(x,\lambda) & G(x)^T \\ G(x) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{c.à.d} \quad |Q(w)|=0 \qquad (3.5)$$

$$\text{Avec : } G(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

Si la fonction admet plusieurs minimums (maximums) locaux, alors il est intéressant d'évaluer la fonction pour chaque point, pour déterminer le minimum (maximum) global.

Exemple : minimiser la fonction $f(x)= -x_1x_2$
Soumise à : $g(x)=2x_1+2x_2-8=0$

Calcul du Lagrangien : $L(x,\lambda) =-x_1x_2+\lambda(2x_1+2x_2-8)$

Calcul des points critiques :

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = -x_2 + 2\lambda = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -x_1 + 2\lambda = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 2x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \quad (3)$$

L'équation (1) implique que : $x_2 = 2\lambda$ (4)
L'équation (2) implique que : $x_1 = 2\lambda$ (5)
En remplaçant les équations (4) et (5) dans l'équation (3), on obtient :

$$4\lambda + 4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Il y'a un seul point critique :
$(x_1,x_2, \lambda)= (2,2,1)$

Etude de la nature des points critiques :

$$Q(w) = \begin{bmatrix} wI_{nxn} - \nabla_x^2 L(x,\lambda) & G(x)^T \\ G(x) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(w) = \begin{bmatrix} w & 1 & 2 \\ 1 & w & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Q(w) est :
$|Q(w)| = 8 - 8w = 0 \Rightarrow w = 1 > 0 \Rightarrow$ le point trouvé est un minimum global (puisque il n'ya qu'un seul point critique).

3. Optimisation avec contraintes de type inégalité

Le problème d'optimisation avec contraintes de type inégalité s'écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$
$$\text{Soumise à : } h_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,2, \dots \dots, q \qquad (3.7)$$

Les contraintes d'inégalité sont de type inférieur ou égal ($\leq$). Si des contraintes de type supérieur ou égal ($\geq$) sont présentes, il suffit alors de les exprimer par leur opposé pour se ramener au cas étudié.

Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode de **c** (KKT).
Cette méthode utilise ce qu'on appelle **paramètres de Karush-Kuhn-Tucker** qui sont les $\boldsymbol{\mu_j}$, pour construire une fonction Lagrangienne.
Le lagrangien s'écrit :

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$
$$L(x,\mu) = f(x) + \mu^T g(x) \qquad (3.8)$$

D'après **Karush-Kuhn-Tucker,** si en un point x, f(x) admet un minimum local dans un domaine admissible D défini par des relations de contraintes inégalités $h_j(x) \le 0$, il existe alors des paramètres $\boldsymbol{\mu_j \ge 0}$ telle que la fonction de Lagrange vérifiée les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,\mu) = 0 \\ \nabla_\mu L(x,\mu) \le 0 \\ \mu_j h_j(x) = 0 \\ \nabla_x^2 L(x,\mu) \ge 0 \end{cases} \qquad (3.9)$$

Ces conditions sont dites conditions de **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**

Lorsque le sens des inégalités des contraintes change, le signe des μ_j change alors.

Nous pouvons résumer les différentes conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) dans le tableau suivant :

Contraintes	Problème de minimisation	Problème de maximisation
$h_j(x) \le 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \le 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \ge 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \le 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \le 0$
$h_j(x) \ge 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \le 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \le 0$	$\nabla_x L(x,\mu) = 0$ $\nabla_\mu L(x,\mu) \le 0$ $\mu_j h_j(x) = 0$ $\nabla_x^2 L(x,\mu) \ge 0$

Tableau 1 : Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Exemple : minimiser la fonction $f(x)= 4x_1^2+5 x_2^2$

Soumise à : $h(x)=x_1-1\le 0$

Le Lagrangien s'écrit : $L(x,\mu) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \mu(x_1 - 1)$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_1} = 8x_1 + \mu = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_2} = 10x_2 = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial \mu} = x_1 - 1 \le 0 \qquad (3)$$
$$\mu h(x) = \mu(x_1 - 1) = 0 \qquad (4)$$
$$\mu \ge 0 \qquad (5)$$

A partir de l'équation (4) on a : $\mu = 0$ ou $x_1 - 1 = 0$

Si $\mu = 0$ alors :

L'équation (1) donne : $x_1 = 0$ et l'équation (2) donne $x_2 = 0$, on remarque que le point (0,0) vérifiée toutes les conditions de **KKT,** alors (0,0) c'est minimum local.

Si $x_1 = 1$ alors :

L'équation (1) donne : $\mu_1 = -8$ et l'équation (2) donne $x_2 = 0$, cette solution est rejetée car la condition (5) n'est pas vérifiée.

Alors le point (0,0) est la seule solution du problème, donc (0,0) c'est un minimum global.

4. Optimisation avec contraintes mixtes

Le problème d'optimisation avec contraintes mixtes s'écrit sous la forme :

$$\text{Minimiser } (f(x))$$
$$\text{Soumise à : } \begin{cases} g_i(x) = 0 & i = 1,2,\dots\dots,p \\ h_j(x) \leq 0 & j = 1,2,\dots\dots,q \end{cases} \qquad (3.10)$$

Dans le cas où il y'a simultanément des contraintes de type égalité et de type inégalité, alors on introduit pour chaque contrainte un paramètre qui lui correspond.

Généralement, on appelle :

- Multiplicateurs de Lagrange, les paramètres λ_i relatifs aux contraintes égalité.
- Paramètres de Karush-Kuhn-Tucker, les paramètres μ_j relatifs aux contraintes inégalité.

Pour résoudre ce problème, on déclare premièrement la fonction de Lagrange suivante

$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$
$$L(x,\mu,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \qquad (3.11)$$

En faisant le changement de variable suivant $z = (x, \lambda)$

L'équation (3.11) peut être réécrite sous la forme :

$$L(z,\mu) = H(z) + \mu^T h(x) \qquad (3.12)$$

Avec : $H(z) = f(x) + \lambda^T g(x)$

Finalement, le problème revient à rechercher l'optimum de la fonction $H(z)$ soumise à des contraintes de type inégalité$h_j(x) \leq 0$.

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla_z L(z,\mu) = \begin{cases} \nabla_x L(z,\mu) = 0 \\ \nabla_\lambda L(z,\mu) = 0 \end{cases} \\ \nabla_\mu L(z,\mu) \leq 0 \\ \mu_j h_j(x) = 0 \\ \mu_j \geq 0 \end{cases} \qquad (3.13)$$

Exemple : minimiser la fonction $f(x)= x_2+x_3$

soumise à : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \end{cases}$

Le Lagrangien s'écrit : $L(x,\mu,\lambda) = x_2+x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1) + \mu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$

Les conditions de KKT s'écrivent :

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_1} = \lambda + 2\mu x_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_2} = 1 + \lambda + 2\mu x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial x_3} = 1 + \lambda + 2\mu x_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L(z,\mu)}{\partial \mu} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \leq 0 \qquad (5)$$

$$\mu h(x) = \mu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0 \qquad (6)$$

$$\mu \geq 0 \qquad (7)$$

L'équation (6) donne : $\mu = 0$ ou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$

Si $\mu = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow \lambda = 0 \\ (2) \Rightarrow \lambda = -1 \\ (3) \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$ il y'a contradiction, donc solution rejetée.

Si $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow x_1 = -\frac{\lambda}{2\mu} \\ (2) \Rightarrow x_2 = -\frac{(\lambda+1)}{2\mu} \\ (3) \Rightarrow x_3 = -\frac{(\lambda+1)}{2\mu} \end{cases} \qquad (8)$

En remplaçant l'équation (8) dans l'équation (4), on obtient :

$$-\frac{\lambda}{2\mu} - \frac{(\lambda+1)}{2\mu} - \frac{(\lambda+1)}{2\mu} - 1 = -\frac{1}{\mu} - -\frac{3\lambda}{2\mu} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu(\frac{1}{\mu} + 1) \qquad (9)$$

En remplaçant l'équation (9) dans l'équation (8), on va obtenir :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3\mu} + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\mu} \\ x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\mu} \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = \left(\frac{1}{3\mu} + \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\mu}\right)^2 - 1 = 0 \qquad (11)$$

En faisant le changement de variable : $y = \frac{1}{3\mu}$

On va réécrire l'équation (11) sous la forme :

$$\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y\right)^2 - 1 = y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{2}$$

La solution $\mu = -\frac{1}{2}$ est rejetée (car la condition (7) n'est pas vérifiée)

Si $\mu = \frac{1}{2}$, on obtient : $x_1 = 1 \quad et \quad x_2 = x_3 = 0$ et $\lambda = -1$ cette solution est admissible, car elle vérifiée toute les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Et f(1,0,0)=0. Le minimum global.