Chapitre. II : Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

I.1. L'équation de la chaleur:

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

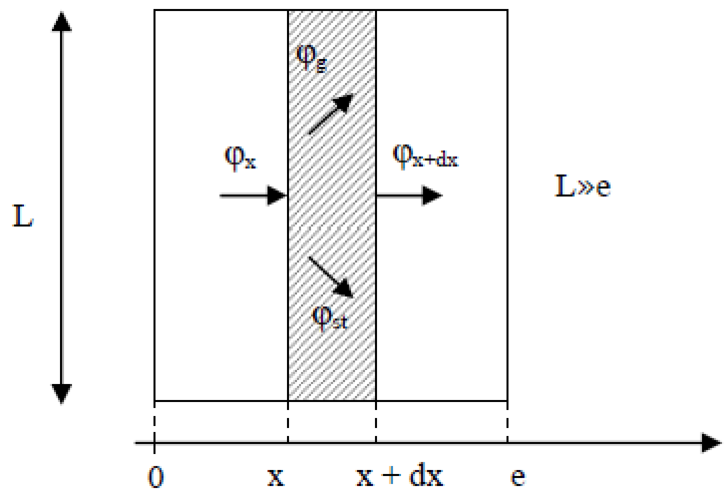


Figure II.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction O_x. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\phi_x + \phi_g = \phi_{st} + \phi_{x+dx}$$

Avec : $\phi_x = -(\lambda S \frac{dT}{dx})_x$, $\phi_{x+dx} = -(\lambda S \frac{dT}{dx})_{x+dx}$, $\phi_g = \dot{q}V = \dot{q}Sdx$ et $\phi_{st} = \rho C_p Sdx \frac{dT}{dt}$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par S et dx , nous obtenons :

$$\frac{(\lambda \frac{dT}{dx})_{x+dx} - (\lambda \frac{dT}{dx})_x}{x + dx - x} + \dot{q} = \rho C_p \frac{dT}{dt} \text{ Soit : } \frac{d}{dx}(\lambda \frac{dT}{dx}) + \dot{q} = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

Si de plus λ est constant, nous obtenons l'équation générale de la chaleur :

$$\lambda \Delta T + \dot{q} = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

En régime permanent et conduction morte, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\lambda \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$$

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{}{r^2}\frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, l'équation :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \rho C_p \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

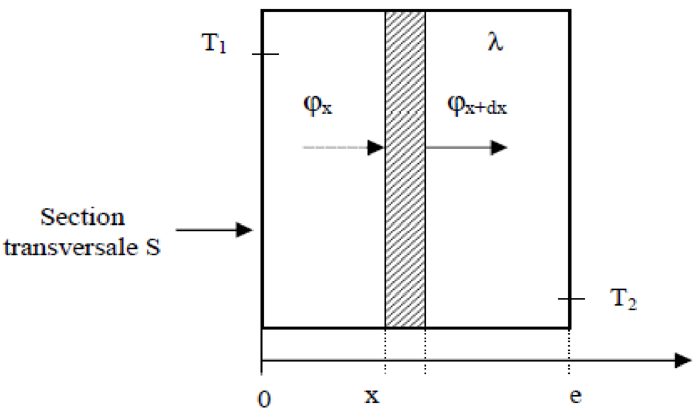
$$\frac{}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2} + \frac{}{r^2 \sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dT}{d\theta}) + \frac{}{r^2 \sin(\theta)^2}\frac{d^2T}{d\varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \rho C_p \frac{dT}{dt}$$

I.2. Transfert unidirectionnel

I.2. 1.Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique l et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T1 et T2 :



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et x + dx, il vient :

$$\phi_x = \phi_{x+dx} \Rightarrow -(\lambda S \frac{dT}{dx})_x = -(\lambda S \frac{dT}{dx})_{x+dx}$$

D'où : $\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A \Rightarrow T(x) = Ax + B$ Avec les conditions aux limites :

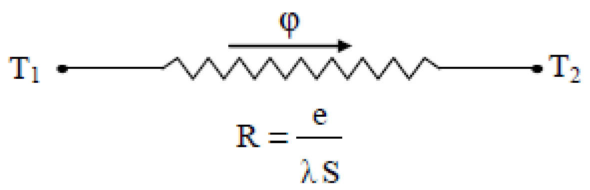
$$T(x=0) = T_1, T(x=e) = T_2$$

D'où : $T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{e}x + T_2$

Le profil de température est donc linéaire. Le flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\phi = -\lambda S gradT = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}}$

cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e, de conductivité thermique λ

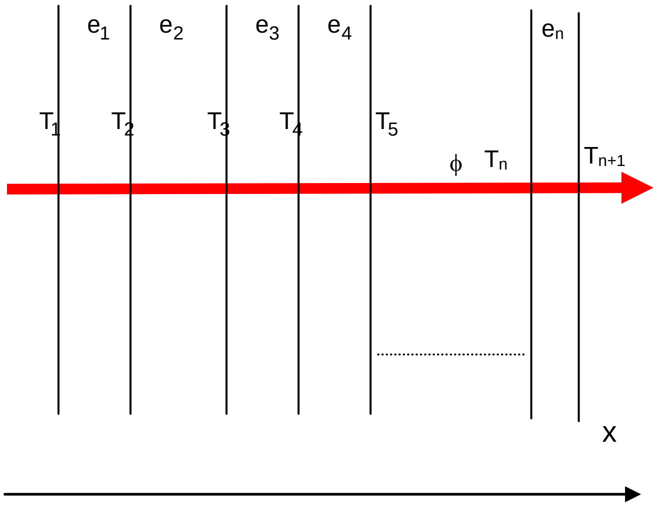
et de surface latérale S. On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure suivante



I.2. 2. Mur multicouches

Considérons n couches de matériaux d'épaisseur respectives e_1, e_2, ….e_n de conductivité thermique $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\lambda_n$ et soit T_1, T_2, ….T_n, T_{n+1} les températures de chacune des faces.

En supposant qu'il n'y a pas de pertes de chaleur(**régime permanent**), ni de production interne (**conduction morte**), le même flux traverse toutes les parois, selon les relations :



$$\Phi = \frac{\lambda_1 S}{e_1}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{\lambda_2 S}{e_2}(T_2 - T_3) = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{\lambda_n S}{e_n}(T_n - T_{n+1}) = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n}$$

Mais d'une manière générale entre deux faces extrêmes : $\phi = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R}$

C'est à dire :

$$T_1 - T_{n+1} = R\,\phi$$
$$T_1 - T_{n+1} = T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_4 \ldots\ldots + T_n - T_{n+1}$$
$$T_1 - T_{n+1} = (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots R_n)\,\phi$$

Une association de murs en série est telle que $\boxed{R = \sum_i R_i}$

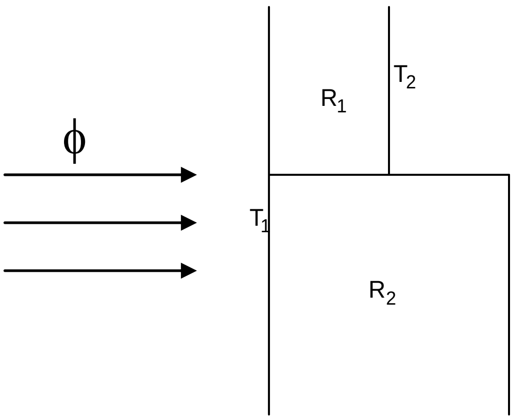
On comprend immédiatement l'intérêt d'une telle relation qui permet d'en tirer le flux échangé par conduction au sein d'un mur composite, sans pour autant connaître les températures des faces de chacune des épaisseurs.

I.2. 3. Mur composé (parallèle)

Dans beaucoup de cas, on peut continuer à combiner les équations relatives à la théorie unidimensionnelle et faire appel à l'analogie électrique avec combinaison de résistances en parallèle.

Exemple **:** Deux murs en parallèle

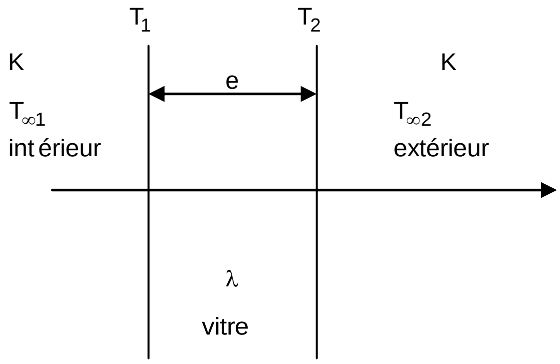
Il s'agit de deux murs superposés : $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = T_1 - T_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{T_1 - T_2}{R}$



Comme pour les résistances électriques on tire donc dans ce cas : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

On peut parfaitement généraliser cette relation obtenue pour 2 murs à un nombre quelconque de murs : $$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Exemple d'application : échange thermique d'une vitre



Considérons une vitre d'épaisseur 4mm.
D'un coté $T_{\infty1} = 25°C$ (intérieur)
De l'autre $T_{\infty2} = -15°C$ (extérieur - hiver)
$\lambda_{vitre} = 1 W/mK$
On considérera 2 cas :
Soit coefficient de convection intérieur $h_{int} = 10 W/mK$.
Soit coefficient de convection extérieur $h_{ext} = 100 W/mK$

$$\Phi = \frac{T_{\infty1} - T_{\infty2}}{R_t}, \text{et} \quad \varphi = \frac{T_{\infty1} - T_{\infty2}}{SR_t}$$

$$SR_t = \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{1}{h_{ext}} = \frac{4.10^{-3}}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 0.114$$

$$\varphi = \frac{40}{0.114} = 350.9 W/m^2$$

$$T_1 = T_{\infty1} - \frac{\varphi}{h_{int}} = -10°C \qquad T_2 = T_{\infty2} - \frac{\varphi}{h_{ext}} = -11.5°C$$

I.2.3. Le mur où la conductivité varie avec la température

Si la gamme des températures rencontrées dans un problème de conduction est telle que les valeurs de λ sont différentes d'une extrémité à l'autre de cette gamme on ne peut plus faire l'hypothèse de λ constant.

Dans ce cas, on peut faire l'approximation que la conductivité thermique varie linéairement avec la température, soit $\lambda = \lambda_0(1+bT)$ avec λ_0 la conductivité à T=0, et b dépend du matériau.

Pour un mur, problème unidimensionnel, il faut alors revenir à l'équation générale de la conduction dans le cas d'une conductivité thermique non uniforme:

$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)=0$ (conduction morte $\dot{q}=0$, en régime permanent $\frac{dT}{dt}=0$)

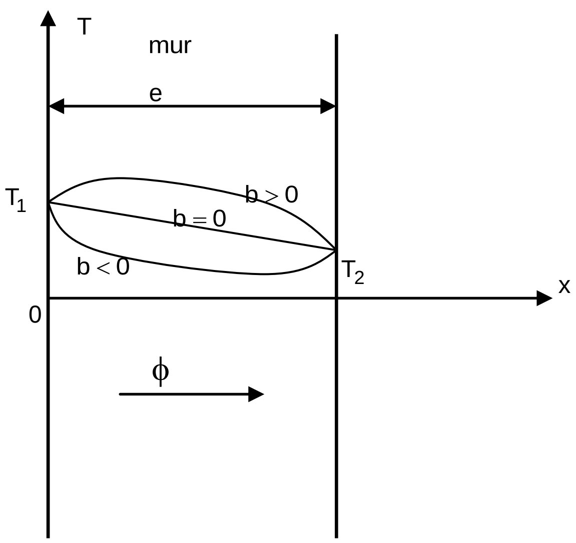
$$\frac{d}{dx}\left(\lambda_0(1+bT)\frac{dT}{dx}\right)=0$$

$$\lambda_0(1+bT)\frac{dT}{dx}=E$$

$$\lambda_0 T+\frac{\lambda_0 bT^2}{2}=Ex+D$$

Les constantes E et D se déterminent expérimentalement.

La distribution des températures est donc parabolique au sein du mur.



On peut résoudre le problème en considérant deux conditions de Dirichlet :

x=0 $T=T_1$ $T_1>T_2$

x=e $T=T_2$

Qui conduisent à $D=\lambda_0\left(T_1+\frac{bT_1^2}{2}\right)$ et $E=\frac{\lambda_0}{e}\left[\frac{b}{2}\left(T_2^2-T_1^2\right)+\left(T_2-T_1\right)\right]$

En reportant dans (1) et en exprimant T(x) on tire :

$$T(x)=-\frac{1}{b}+\sqrt{\left(\frac{1}{b}+T_1\right)^2+\frac{2Ex}{b\lambda_0}}$$

Trois cas sont a envisager : b>0, b=0 et b<0

b=0 : $\lambda=\lambda_0$: cas linéaire entre T_1 et T_2 (cas déjà traité)

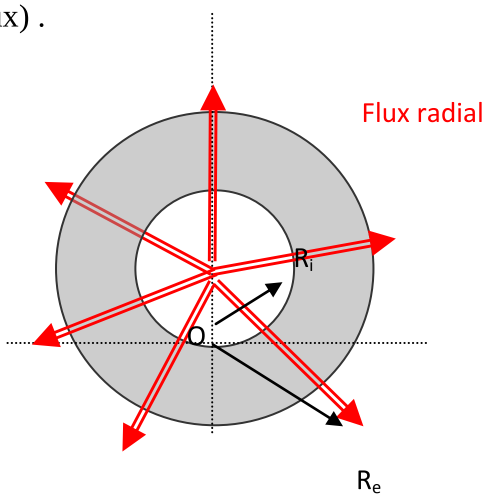
b>0 : concavité vers le haut (*voir dessin*)

b<0 : concavité vers le bas

I.3. Le cylindre creux : Application au calorifugeage

Considérons un cylindre creux (ou conduite tubulaire) suffisamment long par rapport aux rayons R_i (*rayon intérieur*) et R_e (*rayon extérieur*)

Les parois internes et externes sont des surfaces isothermes. La température ne dépend pas de la cote z (axe du cylindre creux) .



L'équation de la conduction est : $\lambda\,\Delta T+\dot q=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}$

Dans le cas d'une conduction morte en régime permanent : $\Delta T=0$

Dans le cas du cylindre, le problème est radial et ne dépend que de r. On rappelle que le Laplacien en coordonnées cylindriques (indépendant de θ et z) s'écrit : $\Delta T=\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}$

Soit : $r\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{dT}{dr}=0$ ou encore $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$

Après une première intégration : $r\frac{dT}{dr}=A$, $\frac{dT}{dr}=\frac{A}{r}$

D'où : $T=A\ln r+B$

Considérons des conditions aux limites de type Dirichlet :

$T=T_e$ si $r=R_e$

$T=T_i$ si $r=R_i$

On obtient le système : $\begin{cases} T_e = A\ln R_e + B \\ T_i = A\ln R_i + B \end{cases}$

Soit $A = \dfrac{T_e - T_i}{\ln\left(\dfrac{R_e}{R_i}\right)}$ et $B = \dfrac{\left(T_e \ln R_i - T_i \ln R_e\right)}{\ln\left(\dfrac{R_e}{R_i}\right)}$

D'où : $$\boxed{T(r) = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\ln r + \frac{\left(T_e \ln R_i - T_i \ln R_e\right)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}}$$

D'autres conditions aux limites sont applicables et le traitement quoiqu'un peu plus compliqué est identique à celui adopté par le mur.

T ne dépend que de r (T(r)).

La loi de Fourier nous dit que $\phi = -\lambda S \dfrac{dT}{dr}$

Soit $\phi = -\lambda 2\pi l r \dfrac{dT}{dr}$ si l'on considère une longueur H de cylindre.

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\right)\frac{1}{r} \quad \text{d'où} \quad \phi = -\frac{\lambda 2\pi H}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\left(T_e - T_i\right) = \frac{\lambda 2\pi H}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}\left(T_i - T_e\right)$$

La résistance thermique est définie comme : $R = \dfrac{T_i - T_e}{\phi}$

Soit $R_{th} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{R_e}{R_i}\right)}{\lambda 2\pi H}$. On a ainsi défini **une nouvelle résistance thermique pour une conduite cylindrique**.

Dans le cas d'un tube circulaire composite, composé par exemple de n matériaux superposés limité par des cylindres $R_0, R_1 \ldots R_n$ de conductivité respectives $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n$.

La résistance thermique de chaque cylindre est : $R_i = \dfrac{\ln\left(\dfrac{R_i}{R_{i-1}}\right)}{2\pi\lambda_i H}$

La résistance thermique totale du tube est : $R_T = \sum_{i=1}^{n} R_i$ (résistances en série)

Si les températures extrêmes T_1 et T_2 sont imposées, on peut calculer le flux par la relation : $\phi = \dfrac{T_2 - T_1}{R_T}$, où R_T est la résistance thermique totale.

I. 2.4. Les sphères concentriques

Nous nous limiterons ici à quelques résultats sans démonstration.
L'équation de la conduction morte en régime permanent nous donne : $\Delta T = 0$

Considérons une sphère creuse de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur R_i. Le problème est radial (r) . En coordonnées sphériques on a :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

qui conduit à $T = \frac{A}{r} + B$

En considérant des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$T = T_e \quad \text{si} \quad r = R_e$$
$$T = T_i \quad \text{si} \quad r = R_i$$

On tire $T(r) = T_i + (T_i - T_e)\dfrac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}$ Soit $\Phi = -\lambda\, 2\pi l r \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{4\pi\lambda}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}(T_i - T_e)$

La résistance thermique est définie comme : $R = \dfrac{T_i - T_e}{\phi}$ soit $R_{th} = \dfrac{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}{4\pi\lambda}$

I.2.5. Synthèse des résultats obtenus en conduction morte unidimensionnelle suivant la géométrie

	Mur plan	Cylindre creux	Sphère creuse
Equation de la conduction	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$
Distribution des températures	$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e}x + T_1$	$T = \frac{T_e - T_i}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\ln r + \frac{(T_e \ln R_i - T_i \ln R_e)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$	$T(r) = T_i + (T_i - T_e)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}$
Flux de chaleur	$\phi = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e}$	$\phi = \frac{2\pi\lambda}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}(T_i - T_e)$	$\phi = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}}(T_i - T_e)$
Résistance thermique	$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$	$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{\lambda\, 2\pi H}$	$R_{th} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}}{4\pi\lambda}$

I.3. Conduction vive en régime permanent

On rencontre le cas de la production interne de chaleur dans de nombreux exemples : résistances électriques, réacteurs nucléaires, lits de combustible, dans les foyers de chaudière, four à induction, four à micro-ondes, réacteurs chimiques, barrage en béton lors de leur coulée, changement de phase…etc..

L'énergie interne dégagée par unité de temps et de volume peut être uniforme et constante dans le temps, ou dépendre directement de la température du point considéré, dépendre de ses coordonnées, dépendre à la fois de sa température et de ses coordonnées.

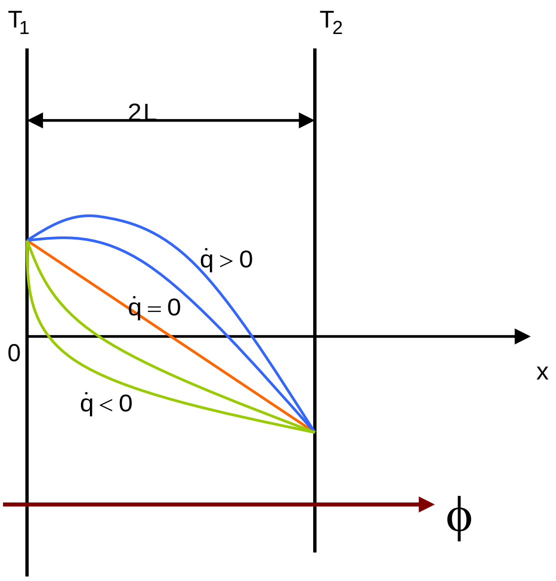
Notons qu'une source interne peut être négative : elle s'appelle alors puits de chaleur. Les réactions endothermiques en constitue un bon exemple.

I.3.1. Le mur d'épaisseur 2L avec une source interne constante dans le temps et uniformément répartie

L'équation de la conduction dans le cas de ce problème à une dimension devient : $\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{q} = 0$

Avec $\dot{q}$: quantité de chaleur par unité de temps et de volume.

D'où $\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{\lambda}x + A$, Soit $\boxed{T = -\frac{\dot{q}}{\lambda}\frac{x^2}{2} + Ax + B}$ La répartition des températures est alors parabolique.



La concavité dépend du signe de la quantité $z = \frac{\dot{q}}{T_1 - T_2}$

Pour des conditions aux limites du type Dirichlet on pose :

En x=0 $\quad T=T_1$

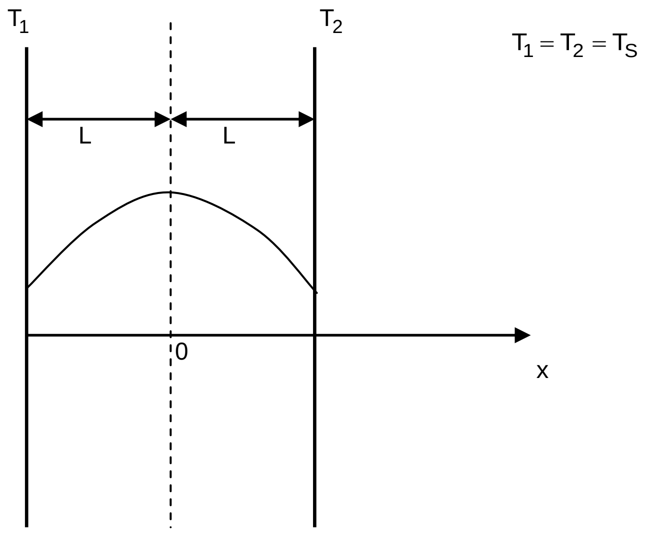
En x=2L $\quad T=T_2$

Dans ce cas il vient : $B = T_1 \quad A = \frac{T_2 - T_1}{2L} + \frac{L\dot{q}}{\lambda}$

D'où $\boxed{T(x) = 2\dot{q}\frac{L^2}{\lambda}\left[\frac{x}{2L} - \left(\frac{x}{2L}\right)^2\right] + (T_2 - T_1)\frac{x}{2L} + T_1}$

On obtient une parabole, dont la concavité varie avec les quantités $T_1 - T_2$ et $\dot{q}$.

Le cas le plus courant est celui ou les températures des surfaces sont égales, c'est-à-dire le cas d'une source interne qui se réparti symétriquement au sein du mur. Compte tenu de la symétrie du problème on peut choisir l'origine au centre de la plaque.



Si on change x en –x : pas de modification de la fonction.

Le problème est symétrique (A=0) Et en x=L $\quad T = T_S = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2 + B$ D'où $\boxed{T = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}\left(x^2 - L^2\right) + T_S}$

La température est maximum au centre avec x=0 : $T_M = -\frac{\dot{q}}{2\lambda}L^2 + T_S$

La température T(x) peut alors s'exprimer en fonction de T_M en éliminant T_S.

$$T(x) = T_M - \frac{\dot{q}}{2\lambda}x^2$$

La quantité de chaleur (ou flux) traversant chaque plan d'abscisse x s'écrit :

$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$ et $\frac{dT}{dx} = -\frac{2\dot{q}}{2\lambda} x = -\frac{\dot{q}}{\lambda} x$

Soit $\phi = \dot{q} S x$ ϕ est fonction de x.

En x=L $\phi = \dot{q} S L = \phi_L$, Remarque : $T_S - T_M = -\frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2$ soit $\dot{q} = \frac{2\lambda}{L^2}(T_M - T_S)$

En reportant dans ϕ_L on tire : $\phi_L = \frac{2\lambda S}{L}(T_M - T_S) = \frac{\lambda S}{\left(\frac{L}{2}\right)}(T_M - T_S)$

Expression tout a fait comparable avec le même problème en conduction morte pour une distance de parcours de la chaleur de $\frac{L}{2}$.

Il est possible d'étudier différents problèmes et adapter le même plan dans le cas de la conduction vive que dans le cas de la conduction morte.

En particulier il est possible d'étudier ce qui se passe avec des conditions aux limites de Fourier.

Il est également possible d'étudier d'autres formes que celles du mur : cylindres pleins, creux, sphère pleines, creuses… etc..

Il est aussi possible de supposer que la source interne $\dot{q}$ dépend de la température et du point considéré.

Nous nous limiterons à deux exemples dont les applications sont importantes :

1. Le cylindre plein avec source interne constante
2. Conduction vive en régime permanent avec source interne dépendant de la position (cas du mur)

I.4. Le cylindre plein avec source interne constante

L'équation de la conduction est :

$\lambda\left(\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right)+\dot{q}=0$ Soit encore $\frac{\lambda}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\dot{q}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+r\frac{\dot{q}}{\lambda}=0$

Après une première intégration on tire : $r\frac{dT}{dr}+\frac{\dot{q}}{2\lambda}r^2+A=0 \quad *\frac{dr}{r}$

$dT+\frac{\dot{q}}{2\lambda}rdr+\frac{A}{r}dr=0$, $T+\frac{\dot{q}}{4\lambda}r^2+A\ln r+B=0$ Soit : $\boxed{T(r)=-\frac{\dot{q}}{4\lambda}r^2+A\ln r+B}$

Les deux constantes A et B sont déterminées par des conditions aux limite en r=0 et r=R (si l'on prend des conditions de Dirichlet)

En r = 0 **La température doit être finie, ce qui impose A=0**

En r = R T=T_R, $B=T_R+\frac{\dot{q}}{4\lambda}R^2$

D'où $\boxed{T(r)=T_R+\frac{\dot{q}R^2}{4\lambda}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}$

Il s'agit donc d'une parabole comme dans le cas du mur.

La température est maximale en r=0 : $T_M=T_R+\frac{\dot{q}R^2}{4\lambda}$

Le flux traversant une surface cylindrique de rayon r donné et de longueur L :

$$\phi=-\lambda S\frac{dT}{dr}=-\lambda 2\pi rL\left(-\frac{\dot{q}r}{2\lambda}\right)=\pi r^2\dot{q}L$$

En particulier le flux quittant le cylindre en surface (r=R) vaut : $\phi=\pi R^2\dot{q}L$

Si l'on connaît la température du milieu ambiant T_∞ (et non T_R), c'est à dire si on se place dans des conditions aux limites de type Fourier :

$$-\lambda\left.\frac{dT}{dr}\right)_{r=R}=K\left(T_R-T_\infty\right) \quad \text{avec} \quad \left.\frac{dT}{dr}\right)_{r=R}=-\frac{\dot{q}r}{2\lambda}$$

$$T_R=T_\infty+\frac{\dot{q}R}{2}$$

D'où $\boxed{T(r)=T_\infty+\frac{\dot{q}R}{2K}+\frac{\dot{q}R^2}{4\lambda}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}$

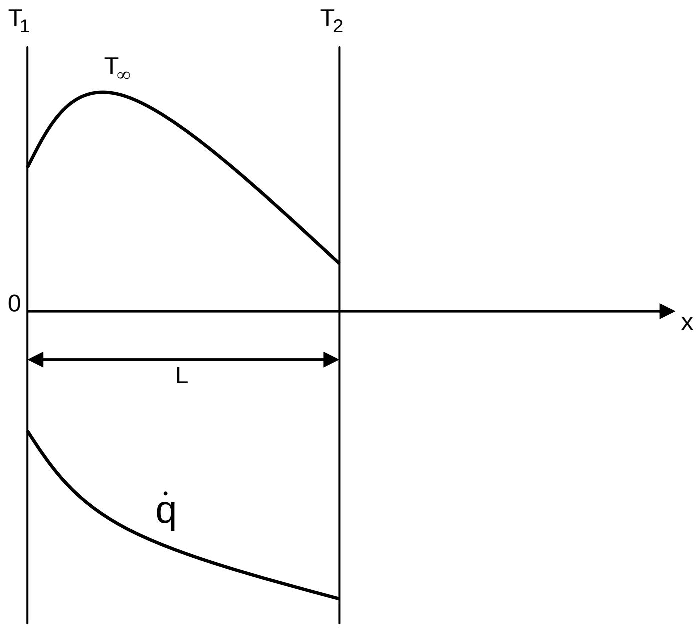
I.5. Le mur avec source interne de chaleur dépendant de la position

On rencontre le cas des sources internes qui dépendent de la position dans l'absorption des neutrons par les éléments combustibles ou autres composants d'un réacteur nucléaire, mais également dans les fours à micro-ondes.

Considérons une plaque d'épaisseur L, de températures de surface T_1 et T_2 (respectivement $T_1>T_2$) et soumise sur la face la plus chaude à un rayonnement conduisant à une production interne de chaleur.

Cette source interne peut être modélises de la façon suivante :

$\dot{q}(x)=\dot{q}_0\, e^{-\mu x}$ avec $\dot{q}_0$ qui est la valeur de $\dot{q}(x)$ en x=0 , μ est un coefficient d'absorption.



Dans ce cas l'équation générale de la conduction s'exprime par :

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}+\dot{q}_0\, e^{-\mu x}=0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{\dot{q}_0}{\lambda}\, e^{-\mu x}$$

$$\frac{dT}{dx}=+\frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu}\, e^{-\mu x}+C$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2} e^{-\mu x} + Cx + D$$

En particulier si : pour x=0 $T=T_1$ et x=L $T=T_2$

On tire x=0 $D = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2}$ Soit $T(x) = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2}\left(1 - e^{-\mu x}\right) + Cx$

Si x=L $T_2 = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2}\left(1 - e^{-\mu L}\right) + CL$ d'où $C = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2 L}\left(e^{-\mu L} - 1\right)$

$$\boxed{T(x) = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{\lambda\mu^2}\left[\left(e^{-\mu L} - 1\right)\frac{x}{L} - \left(e^{-\mu x} - 1\right)\right] + \left(T_2 - T_1\right)\frac{x}{L}} \quad [24]$$

On voit que cette expression se compose d'un terme de conduction morte (évolution linéaire du type $(T_2 - T_1)\frac{x}{L}$) et d'un terme du à la source interne d'allure exponentielle.

On peut également chercher la puissance totale rayonnée (source interne) :

$q_T = \int_0^L \dot{q}\, d\tau$ avec $d\tau$ l'élément de volume

$$q_T = \int_0^L \dot{q}\, S\, dx = \dot{q}_0 S \int_0^L e^{-\mu x}\, dx = \frac{\dot{q}_0 S}{\mu}\left(1 - e^{-\mu L}\right)$$