Université de M.Boudiaf M'sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Premiéire année Mester Algèbre et Mathématiques Discrètes

2020/2021

Module : Semigroupes et Automates Finis

Exercice 1

- Soit X une partie de A^*, on note

$$X^* = \{w = x_1.\ x_2\ ...x_n\ , n \in \mathbb{N}\ et\ \forall 1 \preceq i \preceq n,\ x_i \in X\} \cup \{\epsilon\}.$$

Monter que X^* est le sous monoïde de A^* engendré par X.

- Soit le monoïde $M = \{1_M, \alpha, \beta\}$, avec $\alpha^2 = \alpha\beta = \alpha$ et $\beta^2 = \beta\alpha = \beta$.

Construire la table de $(M, \cdot)$.
On considère l'application $f : \{a, b\}^* \longrightarrow M$, où $f(\varepsilon) = 1_M, f(w) = \alpha$, si $w \in a\{a, b\}^*, f(w) = \beta$, si $w \in b\{a, b\}^*$.
Montrer que f un morphisme de monoïdes.

- Soit A un alphabet fini et $L = \{a\}, a \in A$. Calculer L^+ et L^*.

- Soient les deux langages $L = \{u \in A^* : |u|\ \text{ est paire}\}$ et $K = \{u \in A^* : |u|\ \text{ est impaire}\}$.

Calculer $L + K, L.K, K.L, L.L, K.K$.

- Soit L un ensemble stable non vide de A^*, i, e, $L^2 \subset L$ tel que $X = \{u \in A^* : Lu \cap uL \cap L \neq \emptyset\}$.

Montrer que : $u \in X \iff (uL \cap L \neq \emptyset$ et $Lu \cap L \neq \emptyset)$.

Exercice 2

- Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ un alphabet, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Et soit $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{N},\ \alpha_i \longmapsto \lambda(\alpha_i)$. On définit $\widetilde{\lambda} : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$\widetilde{\lambda}(w) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda(\alpha_i)\,|w|_{\alpha_i}.$$

Montrer que $\widetilde{\lambda}$ est un homomorphisme de monoïdes.

- Soit $h : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ un morphisme, on définit la relation associée à h, notée $\equiv_h$ comme suit :

$$\text{pour tous } u, v \in \Sigma^*, u \equiv_h v \Longleftrightarrow h(u) = h(v).$$

Montrer que $\equiv_h$ est une congruence sur Σ^*.

- Soit $\mathcal{R}$ une relation sur Σ^* et $h : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$ un morphisme de monoïdes qui vérifie $h(r) = h(s)$ pour tout $(r, s) \in \mathcal{R}$.

Montrer qu'il existe un unique morphisme $\psi : \Sigma^* / \underset{\mathcal{R}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \longrightarrow \Gamma^*$ tel que $\psi \circ p = h$ où $\underset{\mathcal{R}}{\overset{*}{\leftrightarrow}}$ est la congruence engendré par $\mathcal{R}$ et p est la surjection canonique.