Série d'exercices

Exo 1. Trouver tous les entiers positifs n pour lesquels $n+1 \mid n^2+1$.

Exo 2. a) Prouver que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.

b) Prouve que $3 \mid n^3 - n$ pour tout entier n.

c) Montrer que le produit de deux entiers de la forme $4k+1$ est aussi de de cette forme, alors que le produit de deux entiers de la forme $4k+3$ est de la forme $4k+1$.

Exo 3. Mettons-nous dans le contexte où l'entier positif a est divisé par l'entier positif b selon la division Euclidienne pour donner

$$a = 652b + 8634.$$

Combien peut-on augmenter à la fois a et b sans changer le quotient 652.

Exo 4. Considérer le nombre $N = 111...11$ ici écrit dans la base 2. Exprimer N^2 dans la base 2.

Exo 5. Démontrer que $39 \mid 7^{37} + 13^{37} + 19^{37}$.

Exo 6. 1) Montrer que pour $a \neq 1$ un entier et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a-1)^2 \mid a^n - a\,(a-1)\,n - 1.$$

2) Application : Démontrer que pour chaque $n \geq$, le nombre $49^n - 2352n - 1$ est divisible par 2304.

Exo 7. Rappelons que si n est un entier positif impair, $a+b \mid a^n + b^n$. Démontrer que le nombre $1^{47} + 2^{47} + 3^{47} + 4^{47} + 5^{47} + 6^{47}$ est un multiple de 7.

Exo 8. Montrer que si un entier est de la forme $6k+5$, alors il est nécessairement de la forme $3k-1$, alors que la réciproque est fausse.

Exo 9. Un entier $n > 1$ peut-il être à la fois de la forme $8k+7$ et de la forme $6k+5$? Expliquer.

Exo 10. Soit $M_1 = 2+1$, $M_2 = 2.3+1$, $M_3 = 2.3.5+1$, $M_4 = 2.3.5.7+1$, ... Démontrer qu'aucun des nombres M_k n'est un carré parfait.

Exo 11. Si x et y sont des entiers impairs, prouver que $x^2 + y^2$ ne peut être un carré parfait.

Exo 12. Soient a et b deux entiers tels que $(a, b) = 1$. Montrer que dans ce cas $(a + b, a - b) = 1$ ou 2.

Exo 13. Soient a et b deux entiers qui sont tous les deux non nuls et $(a, b) = 1$. Etudier $(a^2 + b^2, a + b)$.

Exo 14. Soit a et b des entiers et soit n un entier positif. Si $a - b \neq 0$, montrer que

$$\left(\frac{a^n - b^n}{a - b}, a - b\right) = \left(n(a, b)^{n-1}, a - b\right).$$

Ind. utiliser $a^n = (a - b + b)^n$ et $b^n = (a - (a - b))^n$.

Exo 15. Soit a et b tels que $(a, b) = 4$. Trouver toutes les valeurs possibles de (a^2, b^3).

Exo 16. Soit a , $b \in \mathbb{N}$ et $d = (a, b)$. Trouver la valeur de $(3a + 5b, 5a + 8b)$ en terme de d et plus généralement celle de $(ma + nb, ra + sb)$ sachant que $ms - nr = 1$, où $m, n, r, s \in \mathbb{N}$.

Exo 17. Démontrer que si quatre entiers positifs a, b, c et d sont tels que $ab = cd$, alors le nombre $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est nécessairement composé.

Exo 18. Résoudre les équations diophantiennes linéaires suivantes en donnant le nombre de leurs solutions positives (i.e. $x > 0$ et $y > 0$):
a) $3x + 4y = 12$.
b) $12x + 9y = 5$.
c) $11x + 29y = 300$.